湘考王·2023年湖南省高三联考试题

数　学

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\{x|x^2-2x-3\leqslant 0\}$，$B=\left\{x\middle|x>\frac{1}{2}\right\}$，则 $A\cap B=$　（　　）

A．$[-3,1]$　　B．$[1,2]$　　C．$\left(\frac{1}{2},1\right]$　　D．$\left(\frac{1}{2},3\right]$

2．若 $z=1+2\mathrm{i}$，则 $(1+z)\cdot\bar{z}=$　（　　）

A．$-2-4\mathrm{i}$　　B．$-2+4\mathrm{i}$　　C．$6-2\mathrm{i}$　　D．$6+2\mathrm{i}$

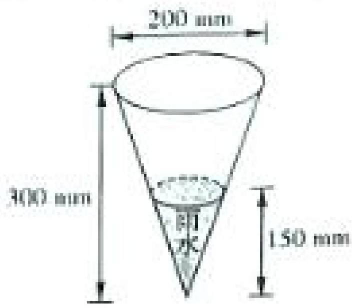
3．在边长为3的正方形 $ABCD$ 中，点 E 满足 $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EB}$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DE}=$　（　　）

A．3　　B．-3　　C．-4　　D．4

4．某一时段内，从天空降落到地面上的雨水，未经蒸发、渗漏、流失而在水平面上积聚的深度，称为这个时段的降雨量（单位：mm）．24 h降雨量的等级划分如下表：

等级	24 h降雨量（精确到0.1）
……	……
小雨	0.1～9.9
中雨	10.0～24.9
大雨	25.0～49.9
暴雨	50.0～99.9
……	……

在综合实践活动中，某小组自制了一个底面直径为200 mm，高为300 mm的圆锥形雨量器．若一次降雨过程中，该雨量器收集的24 h的雨水高度是150 mm，如图所示，则这24 h降雨量的等级是　（　　）



A．小雨　　B．中雨

C．大雨　　D．暴雨

5. 奥林匹克标志由五个互扣的环圈组成，五环象征五大洲的团结。五个奥林匹克环总共有 8 个交点，从中任取 3 个点，则这 3 个点恰好位于同一个奥林匹克环上的概率是 ( )

A. $\frac{3}{11}$　　B. $\frac{5}{14}$　　C. $\frac{3}{7}$　　D. $\frac{1}{7}$

6. 在锐角△ABC 中，$C=\frac{\pi}{6}$，$AC=4$，则 BC 的取值范围是 ( )

A. $\left(0,\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)$　　B. $\left(2\sqrt{3},\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)$　　C. $(2\sqrt{3},+\infty)$　　D. $\left(4,\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)$

7. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，点 P 在三棱锥 C_1-BCD 的表面上运动，且 $A_1P=\frac{\sqrt{15}}{3}$，则点 P 轨迹的长度是 ( )

A. $\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{6}\pi$　　B. $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6}\pi$　　C. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6}\pi$　　D. $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}\pi$

8. 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)+f(x)=x^2$，且当 $x\leqslant 0$ 时，$f'(x)<x$，其中 $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导数，则不等式 $f(x)-f(1-x)\geqslant x-\frac{1}{2}$ 的解集是 ( )

A. $(-\infty,1]$　　B. $[1,+\infty)$　　C. $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$　　D. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x)=\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}}{2}$，则下列说法正确的是 ( )

A. $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

B. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π

C. 函数 $f(x)$ 的对称轴方程为 $x=k\pi+\frac{5\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$

D. 函数 $f(x)$ 的图象可由 $y=\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到

10. 设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，前n项积为T_n，并且满足条件$a_1>1$，$a_6a_7>1$，$\dfrac{a_6-1}{a_7-1}<0$，则下列结论正确的是 （ ）

A. $0<q<1$　　B. $a_6a_8>1$

C. T_n的最大值为T_6　　D. $T_{11}>1$

11. 过抛物线C：$y^2=2px(p>0)$焦点F的直线与C交于A，B两点，点A，B在C的准线l上的射影分别为A_1，B_1，$\angle A_1AB$的平分线与l相交于点P，O为坐标原点，则 （ ）

A. $AF\perp PF$　　B. 三点A、O、B_1共线

C. 原点O可能是$\triangle PAB$的重心　　D. $\triangle OBF$不可能是正三角形.

12. 已知函数$f(x)=a^x+b^x-c^x$，其中a，b，$c\in(0，+\infty)$，$f(2)=0$，则下列结论正确的是 （ ）

A. $f\left(\dfrac{1}{2}\right)>0$　　B. $f(3)<0$

C. $f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递减　　D. $f(1)f(-1)$最大值为$4-2\sqrt{2}$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 在$\left(3x^2-\dfrac{2}{x}\right)^n$的展开式中，二项式系数之和为32，则展开式中$x^4$项的系数为________.

14. 已知某食品每袋的质量$X\sim N(500，16)$，现随机抽取10 000袋这种食品，则质量在区间（492，504］的食品约________袋（质量单位：g）.
附：$X\sim N(\mu，\sigma^2)$，则$P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)=0.682\ 7$，
$P(\mu-2\sigma<X\leqslant\mu+2\sigma)=0.954\ 5$，$P(\mu-3\sigma<X\leqslant\mu+3\sigma)=0.997\ 3$.

15. 已知过原点的直线l与双曲线C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$的左、右两支分别交于$A$，$B$两点，$F$是$C$的右焦点，且$AF\perp BF$，若满足$\overrightarrow{FP}=2\overrightarrow{BF}$的点$P$也在双曲线$C$上，则$C$的离心率为________.

16. 已知e是自然对数的底数，若$\forall x\in(0，+\infty)$，$me^{mx}\geqslant\ln x$成立，则实数m的最小值是________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10 分）

已知正项数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且满足

$2S_n=a_n^2+a_n$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设 $b_n=\dfrac{4}{a_na_{n+2}}$，数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n，证明：$T_n<3$．

18．（12 分）

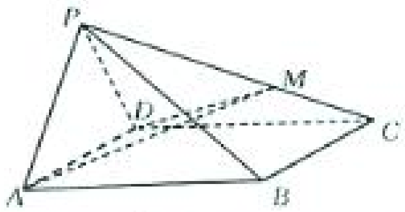
作为一种益智游戏，中国象棋具有悠久的历史，中国象棋的背后，体现的是博大精深的中华文化．为了推广中国象棋，某地举办了一次地区性的中国象棋比赛，小明作为选手参加．除小明以外的其他参赛选手中，50%是一类棋手，25%是二类棋手，其余的是三类棋手．小明与一、二、三类棋手比赛获胜的概率分别是 0.3、0.4 和 0.5．

（1）从参赛选手中随机选取一位棋手与小明比赛，求小明获胜的概率；

（2）如果小明获胜，求与小明比赛的棋手为一类棋手的概率．

19.（12 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，$PA=PD=\sqrt{10}$，侧面 PAB 的面积为$\sqrt{10}$.



（1）证明：平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$；

（2）点 M 在棱 PC 上，当三棱锥 $P-ADM$ 的体积为$\frac{4}{3}$时，求直线 AM 与平面 PAB 所成的角的正弦值.

20.（12 分）

如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=6$，$AD=CD=4$.

（1）当四边形 $ABCD$ 内接于圆 O 时，求角 C；

（2）当四边形 $ABCD$ 的面积最大时，求对角线 BD 的长.

21.（12 分）

已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$A$，$B$ 是它的左、右顶点，过点 $D(1，0)$的动直线 l(不与 x 轴重合)与 E 相交于 M，N 两点，$\triangle MAB$ 的最大面积为 $2\sqrt{2}$。

(1) 求椭圆 E 的方程；

(2) 设 $P(m，n)$是直线 AM 与直线 BN 的交点。

(ⅰ) 证明 m 为定值；

(ⅱ) 试探究：点 B 是否一定在以 MN 为直径的圆内？证明你的结论。

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=x\ln x-2x+1$，$g(x)=\frac{1}{2e}(x-e)^2+1-e$。

(1) 比较 $f(x)$，$g(x)$的大小，并说明理由；

(2) 已知函数 $f(x)$的两个零点为 x_1，x_2，证明：$2e<x_1+x_2<e^2$。