一、选择题

1．C【解析】因为$z=\frac{1+3i}{2+i}=\frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{5+5i}{5}=1+i$，所以$z$在复平面内对应的点的坐标为$(1,1)$，位于第一、三象限的角平分线上．

2．B【解析】由$b=(1,1)$，得$|b|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，则$|a+b|=\sqrt{a^2+b^2+2a\cdot b}=\sqrt{|a|^2+|b|^2+2a\cdot b}=\sqrt{10}$，即$4+2+2a\cdot b=10$，则$a\cdot b=2$，所以向量$a$在向量$b$上的投影向量的坐标为$(\frac{a\cdot b}{|b|})\frac{b}{|b|}=b=(1,1)$．

3．A【解析】因为ΔABC为直角三角形，且$A=90^\circ$，$B=60^\circ$，$AB=2$，所以$BC=4$，且$<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}>=120^\circ$，所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos 120^\circ=2\times4\times(-\frac{1}{2})=-4$．

4．B【解析】设$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为$\theta(\theta\in[0,\pi])$，当θ为钝角时，$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|^2=4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<0$，所以$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|<|\overrightarrow{BC}|$；当$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|<|\overrightarrow{BC}|$时，$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|^2<|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|^2$，所以$4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<0$，即$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<0$，故$\cos\theta<0$，所以$\frac{\pi}{2}<\theta\le\pi$，所以“$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为钝角”是“$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|<|\overrightarrow{BC}|$”的充分不必要条件．

5．D【解析】由题意得$\overrightarrow{BE}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{BO}$，显然$BE=DG$，$BO=OD=\frac{1}{2}BD$，所以$\overrightarrow{BG}=(2-\frac{\sqrt{5}-1}{2})\overrightarrow{BO}=\frac{5-\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{BO}$，故$\overrightarrow{BO}=\frac{2}{5-\sqrt{5}}\overrightarrow{BG}=\frac{2}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}\overrightarrow{BG}$，因为$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BA}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{BA}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}(\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{BA})=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{BO}$，所以$\overrightarrow{BF}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{\sqrt{5}}{5}\overrightarrow{BG}$．

6．D【解析】设$z=x+yi$，$x,y\in R$，则$x^2+y^2+4i(x-yi)=5+ai$，整理得$x^2+y^2+4y+4xi=5+ai$，所以$\begin{cases}x^2+y^2+4y=5,\\4x=a,\end{cases}$即$y^2+4y+\frac{a^2}{16}-5=0$．因为此方程有实根，所以$\Delta=16-4(\frac{a^2}{16}-5)\ge0$，解得$-12\le a\le12$．

7．B【解析】对于①，设BC的中点为D，连接PD，则$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PD}$．又$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=0$，所以$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=-\overrightarrow{PA}$，所以$\overrightarrow{PA}=-2\overrightarrow{PD}$，故点$P$为$\Delta ABC$的重心；对于②，由$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB})=\overrightarrow{PC}\cdot(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB})$，得$(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB})\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=0$，故$AB\perp AC$，即$\Delta ABC$为直角三角形；对于③，由点$P$到$\Delta ABC$三个顶点的距离相等，得点$P$为$\Delta ABC$的外心；对于④，由$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$，得$(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC})\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，同理可得$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{PA}=0$，所以$AC\perp PB$，$AB\perp PC$，$BC\perp PA$，即点$P$为$\Delta ABC$

的垂心，当ΔABC

为等边三角形时，重心、外心、垂心重合，此时①③④均成立，②不成立，满足要求；当②

成立时，其他三个均不一定成立.

8．D【解析】根据题意知A为集合X_n的非空子集，满足$I(A)=1$的集合只有1个，即$\{1\}$；满足$I(A)=2$的集合有2个，即$\{2\}$，$\{1，2\}$；满足$I(A)=3$

的集合有4个，即$\{3\}$，$\{1，3\}$，$\{2，3\}$，$\{1，2，3\}$；……；满足$I(A)=n$的集合有2^{n-1}个，所以$S(n)=1+2\times 2+3\times 2^2+\cdots+n\cdot 2^{n-1}$，则$2S(n)=1\times 2+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1}+n\cdot 2^n$，两式相减得$-S(n)=1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}-n\cdot 2^n=2^n-1-n\cdot 2^n$，所以$S(n)=(n-1)\cdot 2^n+1$，所以$S(2023)=2022\times 2^{2023}+1$.

二、选择题

9．ACD【解析】对于A，因为$a*b=|a||b|\sin\theta=0$，所以$\sin\theta=0$，解得$\theta=0$或$\theta=\pi$，所以$a//b$，故选项A正确；对于B，不妨取$a=(1,0)$，$b=(0,1)$，$c=(0,-1)$，设a与$b+c$的夹角为α，a与c的夹角为β，则$a*(b+c)=|a||b+c|\sin\alpha=1\times 0\times 0=0,a*b+a*c=|a||b|\sin\theta+|a||c|\sin\beta=1\times 1\times 1+1\times 1\times 1=2$，此时$a*(b+c)\neq a*b+a*c$，故选项B错误；对于C，

$2(a*b)(a\cdot b)=2(|a||b|\sin\theta)(|a||b|\cos\theta)=2|a|^2|b|^2\sin\theta\cos\theta=a^2b^2\sin 2\theta$，故选项C正确；对于D，当$|a|=|b|=1$时，$a*b=|a||b|\sin\theta=\sin\theta\leq 1$，当且仅当$\theta=\frac{\pi}{2}$时取等号，所以$(a*b)_{\max}=1$，故选项D正确.

10．BD【解析】设$z_1=1+i$，$z_2=\sqrt{2}i$，则$|z_1|=|z_2|=\sqrt{2},z_1^2=(1+i)^2=2i,z_2^2=(\sqrt{2}i)^2=-2$，不满足$z_1=\pm z_2$，也不满足$z_1^2=z_2^2$，故选项AC错误；对于B，设$z_1$，$z_2$在复平面内对应的向量分别为$\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$，且$\overrightarrow{OZ_1},\overrightarrow{OZ_2}\neq 0$，由向量加法的几何意义知$|\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}|\leq|\overrightarrow{OZ_1}|+|\overrightarrow{OZ_2}|$，故$|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$，故选项B正确；对于D，设$z_1=a+bi$，$z_2=c+di$，$a$，$b$，$c$，$d\in R$，且$a$，$b$，$c$，$d\neq 0$，则$z_1z_2=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$，所以$|z_1z_2|=\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}=\sqrt{(ac)^2+(bd)^2+(ad)^2+(bc)^2}$，$|z_1|\cdot|z_2|=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}=\sqrt{(ac)^2+(bd)^2+(ad)^2+(bc)^2}=|z_1z_2|$，故选项D正确.

11．AC【解析】设$\angle OAD=\theta(0\leq\theta<\frac{\pi}{2})$，因为$AD=1$，所以$OA=\cos\theta,OD=\sin\theta,\angle BAx=\frac{\pi}{2}-\theta$，故$x_B=\cos\theta+\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta+\sin\theta$，$y_B=\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta$，所以$\overrightarrow{OB}=(\cos\theta+\sin\theta,\cos\theta)$．同理可得$C(\sin\theta,\cos\theta+\sin\theta)$，所以$\overrightarrow{OC}=(\sin\theta,\cos\theta+\sin\theta)$，所以$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=(\cos\theta+\sin\theta,\cos\theta$

$)\cdot(\sin\theta,\cos\theta+\sin\theta)=1+\sin2\theta$．因为$0\le\theta<\frac{\pi}{2}$，所以$0\le\sin2\theta\le1$，则$1\le\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\le2$，故$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$的值可能是1，2．

12．BC【解析】对于A，令$x=y=0$，由$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y)$，得$2f(0)=2f^2(0)$，故$f(0)=0$或$f(0)=1$，故选项A错误；对于B，令$x=y$，则$f(2x)+f(0)=2f^2(x)$，故$f(2x)+f(0)\ge0$．因为$x\in R$，令$t=2x$，$t\in R$，所以$f(t)+f(0)\ge0$，即$f(x)+f(0)\ge0$，故选项B正确；对于C，令$x=1$，$y=0$，则$f(1)+f(1)=2f(1)\cdot f(0)$，若$f(1)=\frac{1}{2}$，则$f(0)=1$；令$x=y=1$，则$f(2)+f(0)=2f^2(1)$，即$f(2)+1=\frac{1}{2}$，所以$f(2)=-\frac{1}{2}$；令$x=2$，$y=1$，则$f(3)+f(1)=2f(2)\cdot f(1)$，即$f(3)+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$，所以$f(3)=-1$；令$x=3$，$y=1$，则$f(4)+f(2)=2f(3)\cdot f(1)$，即$f(4)-\frac{1}{2}=-1$，所以$f(4)=-\frac{1}{2}$；令$x=4$，$y=1$，则$f(5)+f(3)=2f(4)\cdot f(1)$，即$f(5)-1=-\frac{1}{2}$，所以$f(5)=\frac{1}{2}$；令$x=5$，$y=1$，则$f(6)+f(4)=2f(5)\cdot f(1)$，即$f(6)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，所以$f(6)=1$；令$x=6$，$y=1$，则$f(7)+f(5)=2f(6)\cdot f(1)$，即$f(7)+\frac{1}{2}=1$，所以$f(7)=\frac{1}{2}$，……由此可得$f(n),n\in N^*$的值有周期性，且周期为6．又

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=0$，所以

$\sum_{n=1}^{2023}f(n)=337\times[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)]+f(1)=\frac{1}{2}$

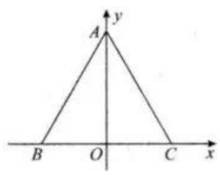
，故选项C正确；对于D，令$x=0$，则$f(y)+f(-y)=2f(0)\cdot f(y)$，当$f(0)=0$时，$f(y)+f(-y)=$，即$f(x)+f(-x)=0$，则$f'(x)-f'(-x)=0$，即$f'(x)=f'(-x)$，所以$f(x)$为偶函数，故选项D错误．

三、填空题

13．$\frac{3}{5}$【解析】设$z=a+bi(a,b\in R)$，由$\frac{2z-1}{1+z}=i$，得$2(a+bi)-1=i(1+a+bi)$，即

$2a-1+2bi=-b+(a+1)i$，所以$\begin{cases}2a-1=-b,\\2b=a+1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=\frac{1}{5}\\b=\frac{3}{5}\end{cases}$，所以$z=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$，故z的虚部是$\frac{3}{5}$．

14．$\frac{\sqrt{3}}{3}$【解析】因为函数$f(x)=a\sin x+\cos x$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{6}$对称，所以$f(x)=a\sin x+\cos x$在$x=\frac{\pi}{6}$时取得最值，结合辅助角公式得$f(\frac{\pi}{6})=\pm\sqrt{a^2+1}$，即$\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}=\pm\sqrt{a^2+1}$，整理得$3a^2-2\sqrt{3}a+1=(\sqrt{3}a-1)^2=0$，解得$a=\frac{\sqrt{3}}{3}$．



15．①【解析】因为$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{CB}|$，所以$\Delta ABC$是等边三角形，取$BC$的中点为$O$，连接$AO$，以$O$为坐标原点，$BC$所在

的直线为x轴，OA所在的直线为y轴，建立平面直角坐标系如图．设$|\overrightarrow{AB}|=2$，则$A(0,\sqrt{3})$，$B(-1,0)$，$C(1,0)$，$P(x,0)(-1\le x\le 1)$，所以$\overrightarrow{AP}=(x,-\sqrt{3}),\overrightarrow{AB}=(-1,-\sqrt{3})$，所以$(2|\overrightarrow{AP}|)^2-(\sqrt{3}|\overrightarrow{AB}|)^2=4x^2\ge 0$，即$2|\overrightarrow{AP}|\ge\sqrt{3}|\overrightarrow{AB}|$，故①正确；$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=-1+3-(x+3)=-1-x\in[-2,0]$，故②错误；$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}$

$=-x+3-(x+3)=-2x\in[-2,2]$，故③错误．

16．$\frac{\pi}{6}$【解析】由$|c-b|=2|c-a|$，得$|c-b|=2|c-b+b-a|$．又由$b=-2a$，得$2|(c-b)-3a|=|c-b|$，则$4[(c-b)^2-6a\cdot(c-b)+9a^2]=(c-b)^2$，即$(c-b)^2-8a\cdot(c-b)+12=0$，即$a\cdot(c-b)=\frac{(c-b)^2+12}{8}$，所以$\cos<a,c-b>=\frac{a\cdot(c-b)}{|a||c-b|}=\frac{(c-b)^2+12}{8|c-b|}\ge\frac{2\sqrt{12(c-b)^2}}{8|c-b|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，当且仅当$(c-b)^2=12$时取等号，所以向量$c-b$与$a$的夹角的最大值是$\frac{\pi}{6}$.

四、解答题

17．解：(1)$z=\bar{z}_1\cdot z_2=(1+i)\cdot(\cos\theta+i\sin\theta)=(\cos\theta-\sin\theta)+(\cos\theta+\sin\theta)i$　(2分)

若复数$z=\bar{z}_1\cdot z_2$为实数，则$\cos\theta+\sin\theta=0$

故$\tan\theta=-1$.　(3分)

又$\theta\in[0,\pi]$，所以$\theta=\frac{3\pi}{4}$　(4分)

(2)因为$z_1=1-i$，$z_2=\cos\theta+i\sin\theta$

所以$|z_1+z_2|=|1-i+\cos\theta+i\sin\theta|=|(1+\cos\theta)+(-1+\sin\theta)i|$

$=\sqrt{(1+\cos\theta)^2+(-1+\sin\theta)^2}=\sqrt{3+2\cos\theta-2\sin\theta}$

$=\sqrt{3+2\sqrt{2}\cos(\theta+\frac{\pi}{4})}$　(6分)

又$\theta\in[0,\pi]$，所以$\theta+\frac{\pi}{4}\in[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$

所以$-1\le\cos(\theta+\frac{\pi}{4})\le\frac{\sqrt{2}}{2}$,　(8分)

则$\sqrt{3-2\sqrt{2}}\le|z_1+z_2|\le\sqrt{5}$

即$\sqrt{2}-1\le|z_1+z_2|\le\sqrt{5}$

故$|z_1+z_2|$的取值范围是$[\sqrt{2}-1,\sqrt{5}]$.　(10分)

18．解：(1)因为$\tan B+\tan C=\frac{\sqrt{2}\sin A}{\cos C}$，所以$\frac{\sin B}{\cos B}+\frac{\sin C}{\cos C}=\frac{\sqrt{2}\sin A}{\cos C}$

即$\sin B\cos C+\cos B\sin C=\sqrt{2}\sin A\cos B$，

故$\sin(B+C)=\sqrt{2}\sin A\cos B$　　（2分）

因为$A+B+C=\pi$，所以$\sin A=\sqrt{2}\sin A\cos B$

又$\sin A\neq 0$，所以$\cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，因为$0<B<\pi$，所以$B=\frac{\pi}{4}$　　（4分）

由正弦定理得$\frac{b}{\sin B}=2R$，则$b=2\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2$.　　（6分）

(2)由余弦定理$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，得$4=a^2+c^2-\sqrt{2}ac$

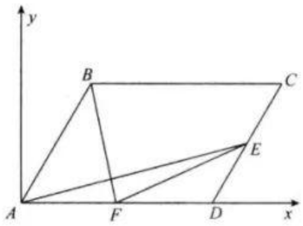
由基本不等式得$4=a^2+c^2-\sqrt{2}ac\geq 2ac-\sqrt{2}ac$，

当且仅当$a=c$时取等号，

所以$ac\leq\frac{4}{2-\sqrt{2}}=2(2+\sqrt{2})$，　　（10分）

所以$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{2}}{4}ac\leq\frac{\sqrt{2}}{4}\times 2(2+\sqrt{2})=1+\sqrt{2}$

故ΔABC面积的最大值为$1+\sqrt{2}$　　（12分）



19．解：(1)在平行四边形$ABCD$中，

$AB=2$，$BC=AD=3$，$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，

建立如图所示的平面直角坐标系，

则$A(0,0)$，$D(3,0)$，$B(1,\sqrt{3})$，$C(4,\sqrt{3})$.　　（2分）

又E为CD的中点，所以$E(\frac{7}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，则$\overrightarrow{AE}=(\frac{7}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$

因为$\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AD}$，所以$F(3\lambda,0)$，则$\overrightarrow{BF}=(3\lambda-1,-\sqrt{3})$.　　（4分）

因为$\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{BF}$，所以$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=0$

即$\frac{7}{2}\times(3\lambda-1)+\frac{\sqrt{3}}{2}\times(-\sqrt{3})=0$，解得$\lambda=\frac{10}{21}$.　　（6分）

(2)由(1)知$F(3\lambda,0)$，$E(\frac{7}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{BF}=(3\lambda-1,-\sqrt{3})$，则$\overrightarrow{FE}=(\frac{7}{2}-3\lambda,\frac{\sqrt{3}}{2})$　　（8分）

所以$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{FE}=(3\lambda-1)\cdot(\frac{7}{2}-3\lambda)-\frac{3}{2}=-9\lambda^2+\frac{27}{2}\lambda-5=-9(\lambda-\frac{3}{4})^2+\frac{1}{16}$

因为$0\leq\lambda\leq 1$，所以当$\lambda=\frac{3}{4}$时，$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{FE}$取得最大值为$\frac{1}{16}$；

当$\lambda=0$时，$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{FE}$取得最小值为$-5$，

6

故$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{FE}$的取值范围是$[-5,\frac{1}{16}]$　　　　(12分)

20．解：(1)因为函数$f(x)=ax^3+bx^2-3x+c$为$\mathbf{R}$上的奇函数，

所以$f(0)=0$，即$c=0$，所以$f(x)=ax^3+bx^2-3x$

又$f(-x)=-f(x)$

所以$-ax^3+bx^2+3x=-ax^3-bx^2+3x$，则$b=0$　　　　(2分)

又$f(x)$在区间$(-\infty,-1)$上单调递增，在区间$(-1,1)$上单调递减，

所以$f(x)$在$x=-1$处取得极大值，

因为$f(x)=ax^3-3x$，$f'(x)=3ax^2-3$

所以$f'(-1)=0$，即$3a-3=0$，解得$a=1$　　　　(4分)

所以$f(x)=x^3-3x$，经检验符合题意．　　　　(5分)

(2)由(1)知$f(x)=x^3-3x$，所以点$A(1,m)(m\neq-2)$

不在曲线$y=f(x)$上，且$f'(x)=3x^2-3$.

设切点为$M(x_0,y_0)$，则$y_0=x_0^3-3x_0$．$f'(x_0)=3(x_0^2-1)$

故切线的斜率满足$3(x_0^2-1)=\frac{x_0^3-3x_0-m}{x_0-1}$，整理得$2x_0^3-3x_0^2+m+3=0$.

因为过点$A(1,m)$可作曲线$y=f(x)$的三条切线，

所以关于x的方程$2x^3-3x^2+m+3=0$有三个实根．　　　　(7分)

设$g(x)=2x^3-3x^2+m+3$，则$g'(x)=6x^2-6x$

令$g'(x)<0$，得$0<x<1$；令$g'(x)>0$，得$x<0$或$x>1$

所以$g(x)$在区间$(-\infty,0),(1,+\infty)$上单调递增，在区间$(0,1)$上单调递减，

所以$g(x)$的极大值点为$x=0$，极小值点为$x=1$　　　　(9分)

所以关于x的方程$2x^3-3x^2+m+3=0$有三个实根的必要条件是$\begin{cases}g(0)=m+3>0\\g(1)=m+2<0\end{cases}$

解得$-3<m<-2$　　　　(10分)

此时$g(-1)=m-2<-4<0$，$g(2)=m+7>4>0$

所以当$-3<m<-2$时，关于x的方程$2x^3-3x^2+m+3=0$有三个实根．

故实数m的取值范围是$(-3,-2)$.　　　　(12分)

21．解：(1)设治理n年后，该市的年垃圾排放量构成数列$\{a_n\}$

官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

当$1 \le n \le 5$时，$\{a_n\}$是首项为$a_1 = 200-20 = 180$，公差为-20的等差数列，

所以$a_n = a_1 + (n-1)d = 180-20(n-1) = 200-20n$. （2分）

当$n \ge 5$时，数列$\{a_n\}$是以a_5为首项，公比为$\frac{3}{4}$的等比数列，

所以$a_n = a_5 q^{n-5} = 100 \times (\frac{3}{4})^{n-5}$ （4分）

所以$a_n = \begin{cases} 200-20n, 1 \le n \le 5, \\ 100 \times (\frac{3}{4})^{n-5}, n \ge 6. \end{cases}$ （5分）

(2)现有的治理措施是有效的，理由如下：

设S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，则$A_n = \frac{S_n}{n}$，

所以$A_{n+1}-A_n = \frac{S_{n-1}}{n+1}-\frac{S_n}{n} = \frac{nS_{n-1}-(n+1)S_n}{n(n+1)} = \frac{n(S_n + a_{n+1})-(n+1)S_n}{n(n+1)} = \frac{na_{n+1}-S_n}{n(n+1)}$

$= \frac{(a_{n+1}-a_1)+(a_{n+1}-a_2)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)}{n(n+1)}$. （8分）

由(1)知当$1 \le n \le 5$时，$a_n = 200-20n$，所以$\{a_n\}$为递减数列； （9分）

当$n \ge 6$时，$a_n = 100 \times (\frac{3}{4})^{n-5}$，所以$\{a_n\}$为递减数列，

且以$a_6 < a_5$，所以当$n \in N^*$时，$\{a_n\}$为递减数列，

故$a_{n+1}-a_1 < 0$，$a_{n+1}-a_2 < 0$，$\cdots$，$a_{n+1}-a_n < 0$，

所以$A_{n+1}-A_n < 0$， （11分）

所以数列$\{a_n\}$为递减数列，即年平均垃圾排放量呈逐年下降趋势，

故认为现有的治理措施是有效的． （12分）

22．(1)证明：要证明$f(x-1) \le 2\sqrt{x}-3$，只需证明$2\sqrt{x}-ln\,x-2 \ge 0$.

设$\varphi(x) = 2\sqrt{x}-ln\,x-2$，$x > 0$，则$\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$ （1分）

令$\varphi'(x) < 0$，得$0 < x < 1$；令$\varphi'(x) > 0$，得$x > 1$

所以$\varphi(x)$在区间$(0,1)$上单调递减，在区间$(1,+\infty)$上单调递增，

所以$\varphi(x) \ge \varphi(1) = 0$，即$2\sqrt{x}-ln\,x-2 \ge 0$

即$ln\,x-1 \le 2\sqrt{x}-3$，故$f(x-1) \le 2\sqrt{x}-3$ （4分）

(2)解：由题意得$g(x) = (x+1)ln\,(x+1)-\frac{1}{2}ax^2-x$，则$g'(x) = ln\,(x+1)-ax$

令$h(x)=g'(x)=ln(x+1)-ax$，$x>0$，则$h'(x)=\frac{1}{x+1}-a$.　　（5分）

当$a\le 0$时，$h'(x)>0$，$g'(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增，所以$g'(x)>g'(0)=0$，

所以$g(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增，无最大值，不符合题意；　　（6分）

当$a\ge 1$时，$h'(x)=\frac{1}{x+1}-a<1-a\le 0$，$g'(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递减，

所以$g'(x)<g'(0)=0$，

所以$g(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递减，无最大值，不符合题意．　　（7分）

当$0<a<1$时，由$h'(x)=\frac{1}{x+1}-a=0$，得$x=\frac{1}{a}-1>0$

当$x\in(0,\frac{1}{a}-1)$时，$h'(x)>0$，$g'(x)$在区间$(0,\frac{1}{a}-1)$上单调递增

当$x\in(\frac{1}{a}-1,+\infty)$时，$h'(x)<0$，$g'(x)$在区间$(\frac{1}{a}-1,+\infty)$上单调递减　　（9分）

由(1)知$\ln x\le 2(\sqrt{x}-1)$

所以当$x>0$时，

$$h(x)\le 2\sqrt{x+1}-2-ax<2\sqrt{x+1}-a(x+1)=\sqrt{x+1}(2-a\sqrt{x+1}).$$

（10分）

取$t=\frac{4}{a^2}-1$，则$t>\frac{1}{a}-1$，且$h(t)<\sqrt{t+1}(2-a\sqrt{t+1})=0$

又$h(\frac{1}{a}-1)>h(0)=0$，所以由零点存在定理，得存在$x_0\in(\frac{1}{a}-1,t)$，使得$h(x_0)=0$

所以当$x\in(0,x_0)$时，$h(x)>0$，即$g'(x)>0$；

当$x\in(x_0,+\infty)$时，$h(x)<0$，即$g'(x)<0$，

所以$g(x)$在区间$(0,x_0)$上单调递增，在区间$(x_0,+\infty)$上单调递减，

所以$g(x)$在区间$(0,+\infty)$上存在最大值$g(x_0)$，符合题意，

综上，实数a的取值范围是$(0,1)$．　　（12分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

自主选拔在线 微信号：zizzsw