



2021 年普通高等学校招生全国统一考试模拟试题

理科数学(一)

本试卷总分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 z 满足 $\frac{1-i}{z} = 1+2i$, 则 $|z| =$

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

2. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x - 4 < 0\}$, $B = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{x | -1 < x \leq 2\}$ B. $\{x | -2 \leq x < 1\}$
C. $\{x | -2 \leq x < 4\}$ D. $\{x | -2 < x < -1\}$

3. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 过点 F 作倾斜角为 45° 的直线 l 交 C 于 A, B 两点, AB 的中点为 D , 且 $D(x_D, 2)$, 则 $p =$

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. $\frac{5}{2}$

4. 亭子是一种中国传统建筑,大多只有顶,没有墙.如图,一个四角亭的顶部视为一个正四棱锥,以该四棱锥的高为边长的正方形面积等于该四棱锥一个侧面三角形面积的一半,则其侧面三角形底边上的高与底面正方形的边长的比值为

- A. $\frac{\sqrt{17}-1}{8}$ B. $\frac{\sqrt{17}-1}{4}$
C. $\frac{1+\sqrt{17}}{4}$ D. $\frac{1+\sqrt{17}}{8}$

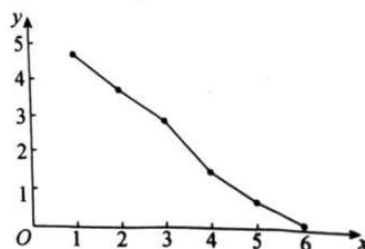


5. 曲线 $f(x) = e^{x-1} + \ln x$ 在点 $P(1, f(1))$ 处的切线方程为

- A. $y = 2x + 1$ B. $y = 2x - 1$ C. $y = -2x + 1$ D. $y = -2x - 1$

6. 如图是某学生六次实验所得的一组数据 (x, y) 的变化折线图:由此折线图,下面四个函数模型中最适宜作为 y 和 x 的函数模型的是

- A. $y = a + bx$
B. $y = a + bx^2$
C. $y = a + be^x$
D. $y = a + b \ln x$





7. $\tan 10^\circ + \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin 10^\circ =$

A. $\sqrt{3}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $2\sqrt{2}$

D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

8. 已知正数 a, b 满足 $\log_2 3 - \log_2 a = 1 - \log_2 b = \log_2 9 - \log_2 (2a + 3b)$, 则 $\frac{3}{a} + \frac{2}{b} =$

A. $\frac{1}{2}$

B. 1

C. $\frac{3}{2}$

D. 2

9. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$), 且 $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{3}$, 当 $|f(x_1) - f(x_2)| = 4$ 时, $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{2}$, 则 $f(\frac{\pi}{6}) =$

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. 1

C. $\frac{3}{2}$

D. 2

10. 在空间四边形 $ABCD$ 中, 二面角 $A-BD-C$ 的平面角为 150° , $\triangle ABD$ 是边长为 2 的等边三角形, $BC = CD = \sqrt{2}$, 则空间四边形 $ABCD$ 外接球的表面积为

A. 3π

B. $\frac{14\pi}{3}$

C. 6π

D. $\frac{28\pi}{3}$

11. 已知函数 $f(x) = 2\cos x - \sin 2x$, $x \in (-\pi, \pi)$, 则 $f(x)$ 的最大值为

A. 2

B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

C. $2\sqrt{2}$

D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

12. 已知圆 $C: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$, 点 $P(t, 0)$ 为 x 轴上一点, 过 P 作直线交 C 于 A, B 两点, 若 $PA = 2AB$, 则实数 t 的取值范围为

A. $[-2, 2]$

B. $[-\sqrt{21}, \sqrt{21}]$

C. $[2-\sqrt{21}, 2+\sqrt{21}]$

D. $[3-\sqrt{21}, 3+\sqrt{21}]$

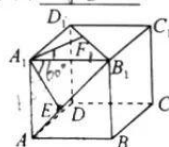
二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \geq 0, \\ x-y+1 \leq 0, \\ y-1 \geq 0, \end{cases}$ 则 $z = x+2y$ 的最小值为 _____.

14. 已知单位向量 e_1, e_2 的夹角为 60° , $a = 2e_1 + 3e_2$, $b = e_1 - 2e_2$, 则 $a \cdot b$ 的值为 _____.

15. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右顶点分别为 A, B , 右焦点为 F , 过 F 且垂直于 x 轴的直线与双曲线交于 C, D 两点, 过 C, D 分别作双曲线的同一条渐近线的垂线, 垂足分别为 P, Q , O 为坐标原点. 若 $2|CP| \cdot |DQ| = |OA|^2$, 则双曲线的离心率为 _____.

16. 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 过点 A_1 分别在平面 ABB_1A_1 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内作 $\angle AA_1B_1$ 与 $\angle B_1A_1D_1$ 靠近点 A 和点 D_1 的三等分线, 分别交 AB_1, D_1B_1 于点 E, F . 现有一个机器人在正方体的表面上从点 E 出发, 则在经过棱 A_1B_1 上一点到点 F 的运动过程中, 其运动轨迹的最短路程为 _____.



三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22, 23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, $a_2 + a_6 = 18$, $a_4 + a_{10} = 30$, 数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, 且 $a_1 - 1, a_2 - 1, a_4 - 1$ 构成数列 $\{b_n\}$ 的前三项.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $c_n = \frac{a_n}{b_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

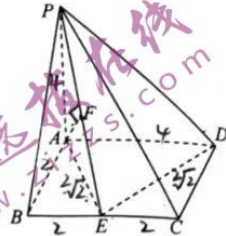


18. (12分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为矩形, $AD=2AB=4$, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA=4$, E 为 BC 的中点, F 为 PE 上一点,且 $AF \perp PE$.

(1)证明: $AF \perp$ 平面 PED .

(2)求二面角 $E-PD-A$ 的余弦值.

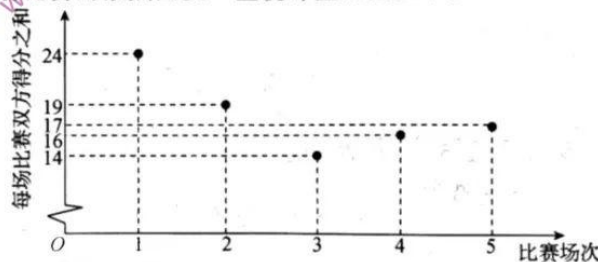


19. (12分)

甲、乙两人进行若干局乒乓球比赛,比赛规则如下:在一局比赛中,先得 11 分的一方为胜方,10 平后,先得 2 分的一方为胜方.已知每局比赛中甲获胜的概率为 $\frac{3}{5}$.

(1)在五局三胜制的规则下,求甲获胜的概率.

(2)若甲、乙共进行 7 局比赛,前 5 局比赛中,甲与乙的比分分别为 $13:11, 8:11, 11:3, 5:11, 11:6$. 记比赛场次分别为 $x_i (i=1, 2, \dots)$, 比赛结束双方得分总和为 $y_i (i=1, 2, \dots)$ (单位:分),统计得到 5 场比赛的散点图及一些统计量的值如下:



$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{w}$	$\sum_{i=1}^5 x_i y_i$	$\sum_{i=1}^5 w_i y_i$	$\sum_{i=1}^5 x_i^2$	$\sum_{i=1}^5 w_i^2$
3	18	0.46	253	45.57	55	1.46

其中 $w_i = \frac{1}{x_i}$, $\bar{w} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 w_i$.

(i) 根据散点图直接判断 $y = a + bx$ 与 $y = c + \frac{d}{x}$ 哪一个更适合作为每局比赛得分之和 y 关于比赛场次 x 的回归模型(不必说明理由)? 并根据表中数据建立 y 关于 x 的线性回归方程.

(ii) 试用上述模型估计后两局比赛的得分总和分别是多少(得分总和四舍五入取整数)? 相应的比赛甲与乙的比分可能为多少?

附:对于一组数据 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3), \dots, (u_n, v_n)$, 其回归直线 $v = \alpha + \beta u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为 $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n u_i v_i - n \bar{u} \bar{v}}{\sum_{i=1}^n u_i^2 - n \bar{u}^2}$, $\hat{\alpha} = \bar{v} - \hat{\beta} \bar{u}$.



20. (12分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 点 M 在椭圆 E 上, 且 $|MF_1|_{\max} = \sqrt{2} + 1$.

(1) 求椭圆 E 的方程.

(2) 过点 F_1 分别作直线 l_1 与 l_2 , 且 $l_1 \perp l_2$, 若直线 l_1 与 l_2 分别与椭圆交于点 A, B 及 C, D , AB 的中点为 P , CD 的中点为 Q , 证明: 直线 PQ 恒过一定点, 并求出该定点坐标.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = e^x - ax - x^2 (a \in \mathbb{R})$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 证明: 函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增.

(2) 当 $a > -1$ 时, 不等式 $f(x) \geq x - x^2 + b (b \in \mathbb{R})$ 恒成立, 求 b 的最大值.

参考数据: $\ln 2 \approx 0.69$.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4—4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = -2 - \sqrt{2}t, \\ y = 3 + \sqrt{2}t \end{cases} (t \text{ 为参数})$, 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2 \sin \theta, \theta \in [0, 2\pi]$.

(1) 求直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 设直线 l 交曲线 C 于 A, B 两点, 点 P 的直角坐标为 $(-2, 3)$, 求 $|PA| \cdot |PB|$.

23. [选修 4—5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数 $f(x) = |x-1| - |2x+1|$.

(1) 求不等式 $f(x) \geq -1$ 的解集;

(2) 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq t^2 + \frac{1}{2}t$ 的解集为空集, 求实数 t 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（<http://www.zizzs.com/>）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》