2019 年秋苏州高三期中数学试卷

2019.11.4

一、填空题

1.已知集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ ，$B=\{x\mid x>0\}$ ，则 $A\cap B=$________.

2.已知复数 z 满足 $\frac{z}{2+i}=i$ (i 为虚数单位)，则复数 z 的实部为________.

3.已知向量 $a=(x,2),b=(2,-1)$,且 $a\perp b$ ，则实数 x 的值是________.

4.函数 $y=\frac{\lg(x-1)}{\sqrt{2-x}}$ 的定义域为________.

5.等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1=1,a_4=8,S_n$,是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,则 $S_5=$________.

6.已知 $\tan\alpha=2$.则 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha+2\sin\alpha}$ 的值为________.

7. “ $x>2$ “是" $x>1$ ” 的___▲___条件， (在 “充分不必要、必要不充分，充要、 既不充分又不必要” 选一填写)

8.已知函数 $y=\sin 2x$ 的图象上每个点向左平移 $\varphi(0<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 个单位长度得到函数 $y=\left(\sin 2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，则 φ 的值为________.

9.设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x,x\geq 0\\2x+1,x<0\end{cases}$ 则不等式 $f(x+2)>f(x^2)$ 的解集为________.

10.已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{m}{x}$ 的极小值大于 0 ，则实数 m 的取值范围为________.

1、$\{1,2\}$　2、-1　3、1　4、$(1,2)$　5、31　6、$\frac{2}{5}$　7、充分不必要　8、$\frac{\pi}{12}$　9、$(-1,2)$　10、$(-\infty,-\frac{1}{e})$

11. 已知各项都为正数的等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_5=3$ 则 a_3a_7 的最大值为________.

解：所求 $\leq(\frac{a_3+a_7}{2})^2=a_5^2=9$（当且仅当 $a_3=a_7$ 时取等）.

12.已知菱形$ABCD$的棱长为3，E为棱CD上一点且满足$\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{ED}$，若$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EB}=-6$，则$\cos C=$________.

解：法一：以C为原点，CD为x轴正方向建系

则$D(3,0)$，$E(2,0)$，$A(3\cos C,3\sin C)$，$B(3\cos C+3,3\sin C)$

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EB}=(2-3\cos C)(3\cos C+1)-9\sin^2 C=3\cos C-7=-6\Rightarrow\cos C=\frac{1}{3}$；

法二：$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EB}=(\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA})\cdot(\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA})=3\cos C-7=-6\Rightarrow\cos C=\frac{1}{3}$.

13.若方程$\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$在$(0,\pi)$的解为$x_1,x_2$，则$\cos(x_1-x_2)=$________.

解：设$\cos\theta=\frac{3}{5}<\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\theta\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$，又$2x-\frac{\pi}{6}\in(-\frac{\pi}{6},\frac{11\pi}{6})$

故$2x-\frac{\pi}{6}=\theta$或$2\pi-\theta\Rightarrow 2(x_1-x_2)=\pm(2\pi-2\theta)\Rightarrow$所求$=\cos[\pm(\pi-\theta)]=-\cos\theta=-\frac{3}{5}$.

14.已知函数$f(x)=3x^2-x^3,g(x)=e^{x-1}-a-\ln x$ 若对于任意$x_1\in(0,3)$，总是存在两个不同的$x_2,x_3\in(0,3)$，使得$f(x_1)=g(x_2)=g(x_3)$， 则实数a的取值范围为________.

解：$f'(x)=3x(2-x)\Rightarrow f(x)$在$(0,2)$递增，$(2,3)$递减，$f(0)=f(3)=0$，$f(2)=4\Rightarrow f(x_1)\in(0,4]$

$g'(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}$，显然$g'(x)$在$(0,3)$递增，$g'(1)=0$，故$g(x)$在$(0,1)$递减，$(1,3)$递增

$g(1)=1-a$，$g(3)=e^2-\ln 3-a$，由题意知：$\begin{cases}1-a\le 0\\ e^2-\ln 3-a>4\end{cases}\Rightarrow a\in[1,e^2-\ln 3-4)$.

二、解答题

15. 在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为$a,b,c,C=120^0,c=7,a-b=2$.

(1)求a,b的值;

(2)求$\sin(A+C)$的值.

解：（1）由余弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$a=b+2$，$c=7$，$C=120^\circ$代入解得：$b=3$，则$a=5$；

（2）由正弦定理：$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow\sin B=\frac{b\sin C}{c}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$

因此$\sin(A+C)=\sin(\pi-B)=\sin B=\frac{3\sqrt{3}}{14}$.

16. 已知向量 $a=\left(\cos x,\sqrt{3}\cos x\right), b=\left(\cos x,\sin x\right)$.

(1)若 $a/\!/b, x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，求 x 的值;

(2)若 $f(x)=a\cdot b$，$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$,求 $f(x)$ 的最大值及相应 x 的值，

解：(1) 因为 $\vec{a}/\!/\vec{b}$，所以 $\cos x\sin x-\sqrt{3}\cos^2 x=0\Rightarrow\cos x(\sin x-\sqrt{3}\cos x)=0$

$\cos x=0$ 或 $\sin x-\sqrt{3}\cos x=0\Rightarrow\cos x=0$ 或 $\tan x=\sqrt{3}$

又 $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，因此 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{\pi}{2}$；

(2) $f(x)=\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{2}=\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})+\dfrac{1}{2}$

$x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]\Rightarrow 2x+\dfrac{\pi}{6}\in[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6}]\Rightarrow 2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$ 即 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 时，$f(x)_{\max}=\dfrac{3}{2}$.

17. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2=2$，且 a_2,a_3+1,a_4 成等差数列。

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)设 $b_n=|a_n-2n+1|$,,求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n.

解：(1) 设公比为 q，$q\neq 0$

$2(a_3+1)=a_2+a_4$

$2(a_2q+1)=a_2+a_2q^2$

$2q^2+2=2(2q+1)$

又 $q\neq 0$，解得：$q=2$，则 $a_1=\dfrac{a_2}{q}=1$

因此，$a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$；

(2) $b_n=\left|2^{n-1}-2n+1\right|$，令 $f(n)=2^{n-1}-2n+1$，则 $f(n+1)-f(n)=2^{n-1}-2$

$n=1,2$ 时，$f(n+1)\le f(n)$；$n\ge 3$ 时，$f(n+1)>f(n)$

故 $f(1)=0>f(2)=f(3)=-1<1=f(4)<f(5)<f(6)<\cdots<f(n)<\cdots$

因此，$b_n=\begin{cases}-f(n), & n\le 3\\ f(n), & n\ge 4\end{cases}$，设数列 $\{f(n)\}$ 的前 n 项和为 S_n

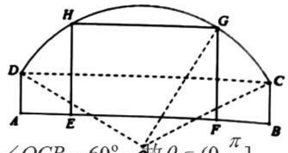
$S_n=\dfrac{1-2^n}{1-2}-\dfrac{n(1+2n-1)}{2}=2^n-n^2-1$，则：

$n\le 3$ 时，$T_n=-S_n=n^2-2^n+1$；

$n\ge 4$ 时，$T_n=-S_3+f(4)+f(5)+\cdots+f(n)=S_n-2S_3=2^n-n^2+3$；

综上，$T_n=\begin{cases}n^2-2^n+1, & n\le 3\\ 2^n-n^2+3, & n\ge 4\end{cases}$.

18.如下图所示，某密洞窗口形状上部是圆弧 CD，下部是个矩形 $ABCD$，圆弧 CD 所在圆的圆心为 O.经测量 $AB=4$ 米，$BD=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 米，$\angle COD=120^0$，现根据需要把此窑洞窗口形状改造为矩形 $EFGH$，其中 E,F 在边 AB 上，G,H 在圆弧 CD 上.设 $\angle OGF=\theta$,矩形 $EFGH$ 的面积为 S .



(1)求矩形 $EFGH$ 的面积 S 关于变量 θ 的函数关系式;

(2)求 $\cos\theta$ 为何值时，矩形 $EFGH$ 的面积 S 最大?

解：（1）$\angle COD=120°$，$OC=OD$，故 $\angle OCD=\angle ODC=30°$，则 $\angle OCB=60°$，故 $\theta\in(0,\frac{\pi}{3}]$

作 $OM\perp CD$ 于 M，$ON\perp GF$ 的延长线于 N，则 $CM=DM=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}AB=2$

$OC=\frac{CM}{\cos\angle OCD}=\frac{4}{\sqrt{3}}\Rightarrow OM=CM\tan\angle OCD=\frac{2}{\sqrt{3}}$，$FN=OM-BC=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$ON=OG\sin\theta=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin\theta$，$GN=OG\cos\theta=\frac{4}{\sqrt{3}}\cos\theta\Rightarrow GF=GN-FN=\frac{4}{\sqrt{3}}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{3}}$

则 $S=2ON\cdot GF=\frac{8}{\sqrt{3}}\sin\theta(\frac{4}{\sqrt{3}}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{8}{3}(4\sin\theta\cos\theta-\sin\theta)$，$\theta\in(0,\frac{\pi}{3}]$

答：矩形 $EFGH$ 的面积 S 关于变量 θ 的函数关系式为 $S=\frac{8}{3}(4\sin\theta\cos\theta-\sin\theta)$，$\theta\in(0,\frac{\pi}{3}]$;

（2）$S'(\theta)=\frac{8}{3}(4\cos^2\theta-4\sin^2\theta-\cos\theta)=\frac{8}{3}(8\cos^2\theta-\cos\theta-4)=0\Rightarrow\cos\theta=\frac{1+\sqrt{129}}{16}$

令 $\cos\theta_0=\frac{1+\sqrt{129}}{16}>\frac{1+\sqrt{49}}{16}=\frac{1}{2}$，$\theta_0\in(0,\frac{\pi}{3})$

θ	0	$(0,\theta_0)$	θ_0	$(\theta_0,\frac{\pi}{3})$	$\frac{\pi}{3}$
$S'(\theta)$		+	0	−	
$S(\theta)$	0	↑	极大值	↓	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

因此，$\theta=\theta_0$，即 $\cos\theta=\frac{1+\sqrt{129}}{16}$ 时，S 取等最大值

答：$\cos\theta=\frac{1+\sqrt{129}}{16}$ 时，矩形 $EFGH$ 的面积 S 最大.

19. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

（1）求 $f(x)$ 的图像在 $x=1$ 处的切线方程；

（2）求函数 $F(x)=f(x)-x$ 的极大值；

（3）若 $af(x)\le \ln x$ 对 $x\in(0,1]$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

解：（1）定义域为：$x\in(0,+\infty)$，$f(1)=0$，$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$，则 $f'(1)=1$，故切线方程为：$y=x-1$；

（2）$F'(x)=\dfrac{x+1-2x\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}=\dfrac{(\sqrt{x}-1)(-2x-\sqrt{x}-1)}{2x\sqrt{x}}$，$x>0$

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$F'(x)$	$+$	0	$-$
$F(x)$	$\uparrow$	极大值	$\downarrow$

因此 $F(x)_{极大值}=F(1)=f(1)-1=-1$；

（3）令 $g(x)=a\sqrt{x}-\dfrac{a}{\sqrt{x}}-\ln x$，$x\in(0,1]$，由题意知：$g(x)_{\max}\le 0$

$g(e^{-2})=a(e^{-1}-e)+2\le 0\Rightarrow a\ge\dfrac{2}{e-e^{-1}}>0$

$g'(x)=\dfrac{a(x+1)-2\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}$，$x\in(0,1]$，令 $h(x)=a(x+1)-2\sqrt{x}$，$x\in(0,1]$

①$a\ge 1$ 时，$h(x)\ge x+1-2\sqrt{x}=(\sqrt{x}-1)^2\ge 0$，即 $g'(x)\ge 0$

则 $g(x)$ 在 $(0,1]$ 递增，$g(x)\le g(1)=0$，符合题意；

②$\dfrac{2}{e-e^{-1}}\le a<1$ 时，$h'(x)=a-\dfrac{1}{\sqrt{x}}<0$，则 $h(x)$ 在 $(0,1]$ 递减

$h(0)=a>0$，$h(1)=2(a-1)<0$，则 $h(0)h(1)<0$

又 $h(x)$ 的图像连续不断，故 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上存在唯一零点，设为 x_0

$x\in(x_0,1)$ 时，$h(x)<0$，即 $g'(x)<0$，故 $g(x)$ 在 $[x_0,1]$ 递减

所以，$g(x_0)>g(1)=0$，与题意不符，舍去；

综上，$a\in[1,+\infty)$.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $(n-1)a_{n+1}=na_n-a_1, n\in N^*$.

（1）证明：数列 $\{a_n\}$ 为等差数列；

（2）设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_2-a_1=1$，且对任意的正整数 n，都有 $\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\dfrac{1}{S_3}+\dots+\dfrac{1}{S_n}<\dfrac{4}{3}$，求整数 a_1 的值；

（3）设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=a_n+\dfrac{3}{10}$，若 $a_2-a_1=\dfrac{1}{5}$，且存在正整数 s,t，使得 a_s+b_t 是整数，求 $|a_1|$ 的最小值.

解：(1) $n\geq 2$时，$\frac{a_{n+1}}{n}=\frac{a_n}{n-1}-\frac{a_1}{n(n-1)}\Rightarrow\frac{a_{n+1}-a_1}{n}=\frac{a_n-a_1}{n-1}=\cdots=a_2-a_1$

故$a_{n+1}=n(a_2-a_1)+a_1$，$a_n=(n-1)(a_2-a_1)+a_1$，$n\geq 2$

所以，$n\geq 2$时，$a_{n+1}-a_n=a_2-a_1$

因此，数列$\{a_n\}$是等差数列；

(2) $\frac{1}{3}<\frac{1}{S_1}=\frac{1}{a_1}<\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{3}{4}<a_1<3$，又$a_1\in Z$，故$a_1=1$或$2$

$a_2=a_1+1\Rightarrow\frac{1}{3}<\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{2a_1+1}<\frac{4}{3}$

$a_1=1$代入上式:$\frac{1}{3}<\frac{4}{3}<\frac{4}{3}$，不成立，舍去;

$a_1=2$代入上式:$\frac{1}{3}<\frac{1}{2}+\frac{1}{5}<\frac{4}{3}$，成立；下证：$a_1=2$符合题意：

由(1)知：$a_n=n+a_1-1=n+1$，$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(n+3)}{2}>0$

显然$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_n}>\frac{1}{S_1}=\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$

$\frac{1}{S_n}=\frac{2}{n(n+3)}=\frac{2}{3}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3})$，则：

$$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_n}=\frac{2}{3}(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3})$$

$$=\frac{2}{3}(\frac{11}{6}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3})<\frac{11}{9}<\frac{4}{3}$$

故$a_1=2$时，$\frac{1}{3}<\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_n}<\frac{4}{3}$对任意$n\in N^*$恒成立，故$a_1=2$;

(3) $a_2-a_1=\frac{1}{5}$，由(1)知：$a_n=\frac{1}{5}(n-1)+a_1$，则：$b_n=\frac{1}{5}n+a_1+\frac{1}{10}$

令$a_s+b_t=\frac{s+t}{5}+2a_1-\frac{1}{10}=k$则$|a_1|=\frac{|2(5k-s-t)+1|}{20}\geq\frac{1}{20}$，$s,t\in N^*$，$k\in Z$

取等条件为：$s+t=5k$或$5k+1$，即$|a_1|_{\min}=\frac{1}{20}$.

温馨提示：

全国重点中学 2019-2020 学年高三月考试题及参考答案（更新下载中），点击链接获得 http://www.zizzs.com/c/201910/39637.html