秘密★启用前

2022届“3+3+3”高考备考诊断性联考卷（二）
理科数学

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考场号、座位号填写在答题卡上.
2. 每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 在试题卷上作答无效.
3. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回. 满分150分，考试用时120分钟.

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 设集合 $M=\{x\mid(x+1)(x-3)\leqslant 0\}$，$N=\left\{x\left|\dfrac{1}{2}<x<4\right.\right\}$，则 $M\cap N=$

A. $\left\{x\left|-1\leqslant x<\dfrac{1}{2}\right.\right\}$　　B. $\left\{x\left|\dfrac{1}{2}<x\leqslant 3\right.\right\}$

C. $\{x\mid 3\leqslant x<4\}$　　D. $\{x\mid -1\leqslant x<4\}$

2. $\dfrac{1-2i}{1+i}=$

A. $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i$　　B. $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i$

C. $-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}i$　　D. $-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i$

3. 如图1所示的茎叶图记录了甲，乙两种商品连续10天的销售数据，则下列说法错误的是

A. 乙销售数据的极差为24

B. 甲销售数据的众数为93

C. 乙销售数据的均值比甲大

D. 甲销售数据的中位数为92

甲		乙
7 6 4	8	8
9 8 3 3 1	9	5 7 8 8
6 3	10	1 2 3 6
	11	2

图1

4. 朗伯比尔定律（Lambert-Beer law）是分光光度法的基本定律，是描述物质对某一波长光吸收的强弱与吸光物质的浓度及其液层厚度间的关系，其数学表达式为 $A=\lg\dfrac{1}{T}=Kbc$，其中 A 为吸光度，T 为透光度，K 为摩尔吸光系数，c 为吸光物质的浓度，单位为mol/L，b 为吸收层厚度，单位为cm. 保持 K，b 不变，当吸光物质的浓度增加为原来的两倍时，透光度由原来的 T 变为

A. $2T$　　B. T^2　　C. $\dfrac{1}{2}T$　　D. $10T$

5. 直线 $y=kx(k>0)$ 与双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$ 在第一、第三象限分别交于 P，Q 两点，F_2 是 C 的右焦点，有 $|PF_2|:|QF_2|=1:\sqrt{3}$，且 $PF_2\perp QF_2$，则 C 的离心率是

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{6}$

C. $\sqrt{3}+1$　　D. $\sqrt{6}+1$

6. 甲、乙、丙三位同学中只有一人会跳拉丁舞，甲说：我会；乙说：我不会；丙说：甲不会；如果这三人中有且只有一人说真话，由此可判断会跳拉丁舞的是

A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 无法确定

7．如图2，在一个正方体中，E，G分别是棱AB，CC'的中点，F为棱CD靠近C的四等分点．平面EFG截正方体后，其中一个多面体的三视图中，相应的正视图是

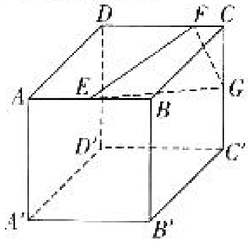
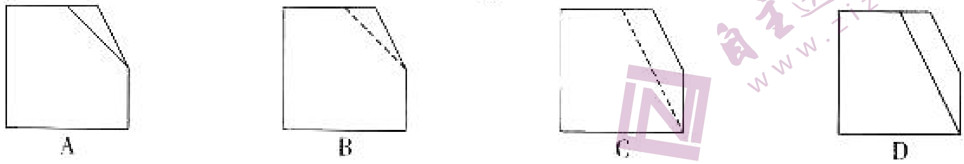


图2



8．$\dfrac{\sin 80^\circ+1}{\sin^2 5^\circ-1}=$

A．$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C．-2　　D．2

9．如图3甲，首钢滑雪大跳台是冬奥历史上第一座与工业遗产再利用直接结合的竞赛场馆，大跳台的设计中融入了世界文化遗产敦煌壁画中"飞天"的元素．如图乙，某研究性学习小组为了估算赛道造型最高点A距离地面的高度AB（AB与地面垂直），在赛道一侧找到一座建筑物CD，测得CD的高度为h，并从C点测得A点的仰角为30°；在赛道与建筑物CD之间的地面上的点E处测得A点、C点的仰角分别为75°和30°（其中B、E、D三点共线）．该学习小组利用这些数据估算得AB约为60米，则CD的高h约为（　　）米．（参考数据：$\sqrt{2}\approx1.41$，$\sqrt{3}\approx1.73$，$\sqrt{6}\approx2.45$）

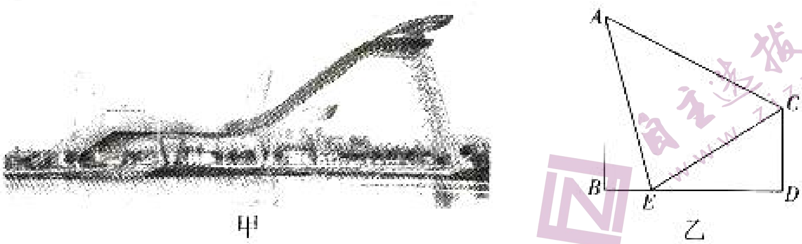


图3

A．11　　B．20.8　　C．25.4　　D．31.8

10．随着北京冬残奥会的开幕，吉祥物"雪容融"火遍国内外，现有3个完全相同的"雪容融"，甲、乙、丙3位运动员要与这3个"雪容融"站成一排拍照留念，则有且只有2个"雪容融"相邻的排队方法数为

A．36　　B．72　　C．120　　D．432

11．已知A，B，C是表面积为16π的球O的球面上的三个点，且$AC=AB=1$，$\angle ABC=30^\circ$，则三棱锥$O-ABC$的体积为

A．$\dfrac{1}{12}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{12}$　　C．$\dfrac{1}{4}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

12．定义域为$\mathbf{R}$的函数$f(x)$满足：①对任意$2\leq x_1<x_2$，都有$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0$；②函数$y=f(x+2)$的图象关于$y$轴对称．若实数$s$，$t$满足$f(2s+2t+2)\leq f(s+3)$，则当$t\in[0,1]$时，$\dfrac{t+1}{t+s+3}$的取值范围为

A．$\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{2}{3}\right]$　　B．$\left[\dfrac{1}{3},2\right]$

C．$\left(-\infty,\dfrac{1}{4}\right]\cup\left(\dfrac{2}{3},+\infty\right)$　　D．$\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right]\cup[2,+\infty)$

二、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

13. 曲线$f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$在点$(0,f(0))$处的切线方程为__________.

14. 若$|\vec{b}|=3|\vec{a}|$，$\vec{a}\perp(2\vec{a}-\vec{b})$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$夹角的余弦值为__________.

15. 已知点P在圆$x^2+y^2=1$上，$A(-2,0)$，$B(0,2)$，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的最小值为__________.

16. 在锐角三角形ABC中，D是线段BC上的一点，且满足$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$，$AD=AB$，则$\tan A+\tan B+\tan C$的最小值是__________.

三、解答题（共70分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分12分）

冰墩墩是2022年北京冬季奥运会的吉祥物，将熊猫形象与富有超能量的冰晶外壳相结合，头部外壳造型取自冰雪运动头盔，装饰彩色光环，整体形象酷似航天员，深受广大民众的喜爱，已成为最火爆的商品，“一墩难求”. 某调查机构随机抽取100人，对是否有意向购买冰墩墩进行调查，结果如下表：

年龄/岁	$[10,20)$	$[20,30)$	$[30,40)$	$[40,50)$	$[50,60)$	$[60,70)$	$[70,80]$
抽取人数	10	20	25	15	18	7	5
有意向购买的人数	10	18	22	9	10	4	2

（1）若以年龄40岁为分界线，由以上统计数据完成下面的2×2列联表，并判断是否有99.9%的把握认为购买冰墩墩与人的年龄有关？

	年龄低于40岁的人数	年龄不低于40岁的人数	总计
有意向购买冰墩墩的人数			
无意向购买冰墩墩的人数			
总计			

（2）若从年龄在$[60,70)$的被调查人群中随机选出3人进行调查，设这三人中打算购买冰墩墩的人数为X，求X的分布列和数学期望.

参考数据：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

18.（本小题满分12分）

已知正项数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$\dfrac{3}{2S_n}=\dfrac{1}{a_n-2}-\dfrac{1}{a_n+4}$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{(-1)^n(S_n-3n)\}$的前n项和T_n.

19.（本小题满分 12 分）

如图 4，已知直三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$ 中，侧面 AA_1B_1B 为正方形，$AB=BC=2$，D，E，F 分别为 AC，BC，B_1B 的中点，$C_1F\perp A_1B_1$，G 为线段 DE 上一动点.

（1）证明：$C_1F\perp A_1G$；

（2）求二面角 $C_1-A_1G-B_1$ 的余弦值的最大值.

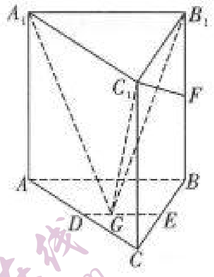


图 4

20.（本小题满分 12 分）

已知圆 O：$x^2+y^2=2$ 与 x 轴交于 A，B 两点，动点 P 满足直线 AP 与直线 BP 的斜率之乘积为 $-\frac{1}{2}$.

（1）求动点 P 的轨迹 E 的方程；

（2）过点(1，0)的直线 l 与曲线 E 交于 M，N 两点，则在 x 轴上是否存在定点 Q，使得 $\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{QN}$ 的值为定值？若存在，求出点 Q 的坐标和该定值；若不存在，请说明理由.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=e^{2x}+ae^x$（$a\in\mathbf{R}$）.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）设 $g(x)=a(1-x)e^x+x^2$，若方程 $g(x)=f(x)$ 有三个不同的解，求 a 的取值范围.

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答，并用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目的题号涂黑. 注意所做题目的题号必须与所涂题目的题号一致，在答题卡选答区域指定位置答题. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22.（本小题满分 10 分）【选修 4-4：坐标系与参数方程】

在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$.

（1）将 C 的极坐标方程化为直角坐标方程；

（2）为解决倍立方体问题，数学家引用了蔓叶线. 设 M 为 C 上的动点，M 关于 $x=1$ 的对称点为 N（M，N 不与原点重合），M 在 x 轴的射影为 H，直线 ON 与直线 MH 的交点为 P，点 P 的轨迹就是蔓叶线. 请写出 P 的轨迹的参数方程.

23.（本小题满分 10 分）【选修 4-5：不等式选讲】

已知函数：$f(x)=|2x+6|+|2x-4|-11$，$g(x)=-|x-1|$.

（1）请在图 5 中画出 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图象；

（2）若 $g(x+t)\leqslant f(x)$ 恒成立，求 t 的取值范围.

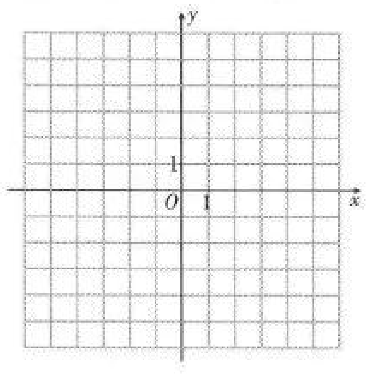


图 5

2022届“3+3+3”高考备考诊断性联考卷（二）
理科数学参考答案

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	D	B	C	B	D	C	C	B	C	A

【解析】

1．因为$M=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$，$N=\left\{x\left|\frac{1}{2}<x<4\right.\right\}$，所以$M\cap N=\left\{x\left|\frac{1}{2}<x\leqslant 3\right.\right\}$，故选B.

2．$\because \frac{1-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(1-2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2}=\frac{-1-3\mathrm{i}}{2}$，故选A.

3．由茎叶图可知A，B正确；另乙商品的销售量均值比甲的高；甲销售数据的中位数是93，故选D.

4．由$Kb\cdot 2c=2\cdot\lg\frac{1}{T}=\lg\left(\frac{1}{T}\right)^2=\lg\frac{1}{T^2}$知，故选B.

5．由对称性可知四边形PF_1QF_2为平行四边形，又由$PF_2\perp QF_2$得四边形PF_1QF_2为矩形，所以$|PQ|=|F_1F_2|=2c$，又$|PF_2|:|QF_2|=1:\sqrt{3}$，所以$|PF_2|=c$，$|QF_2|=\sqrt{3}c$，所以有$|QF_2|-|PF_2|=(\sqrt{3}-1)c=2a$，所以$e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$，故选C.

6．∵三人中有且只有一人说真话，∴假设甲说真话，而乙、丙说假话，则甲会、乙会，与题设矛盾；假设乙说真话，而甲、丙说假话，有矛盾；假设丙说真话，而甲、乙说假话，则甲不会、乙会，符合题设；综上，乙会跳拉丁舞，故选B.

7．先将过点E，F，G的截面补充完整，如图1所示，故多面体$AEB'A'-DFGC'D'$的正视图为D，故选D.

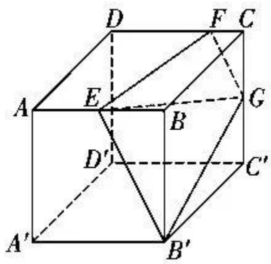


图1

8．$\because \sin^2 5^\circ-1=\frac{1-\cos 10^\circ}{2}-1=\frac{-(1+\cos 10^\circ)}{2}$，∴原式$=\frac{-2(\sin 80^\circ+1)}{1+\cos 10^\circ}=\frac{-2(\cos 10^\circ+1)}{1+\cos 10^\circ}=-2$，故选C.

9．如图2，由题得 $AE=\dfrac{AB}{\sin 75^\circ}=\dfrac{60}{\sin 75^\circ}$，$\dfrac{CE}{\sin 45^\circ}=\dfrac{AE}{\sin 60^\circ}$，所以 $CE=\dfrac{20\sqrt{6}}{\sin 75^\circ}$，所以 $CD=\dfrac{1}{2}CE=\dfrac{10\sqrt{6}}{\sin 75^\circ}$，$\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\therefore CD=\dfrac{40\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=60-20\sqrt{3}\approx 60-20\times 1.73=25.4$，故选C．

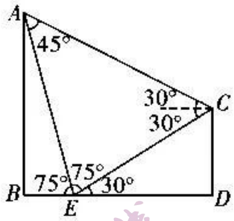


图2

10．先排甲乙丙三位运动员有 $A_3^3=6$ 种不同的排法，然后把2个"雪容融""捆"在一起记作 A，剩下一个"雪容融"记作 B，把 A，B 插入甲乙丙3人旁边4个位置中的2个位置有 $A_4^2=12$ 种，所以共有 $6\times 12=72$ 种，故选B.

11．如图3，$\because \angle ABC=30^\circ$，$AC=AB=1$，$\therefore \dfrac{AC}{\sin\angle ABC}=\dfrac{1}{\sin 30^\circ}=2$，则 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为1．又$\because$球的表面积为 16π，即 $S=4\pi R^2=16\pi$，$\therefore$球的半径为2．设 O 到平面 ABC 的距离为 d，则 $d=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，所以 $V_{O-ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot d=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 1\times 1\times\sin 120^\circ\times\sqrt{3}=\dfrac{1}{4}$，故选C.

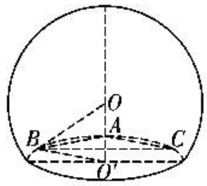


图3

12．由对任意 $2\leqslant x_1<x_2$，都有 $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0$，可得 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增；由函数 $y=f(x+2)$ 的图象关于点 y 轴对称，得函数 $y=f(x)$ 的图象关于 $x=2$ 对称，由 $f(2s+2t+2)\leqslant f(s+3)$，得 $|(2s+2t+2)-2|\leqslant|(s+3)-2|$，$\therefore|2s+2t|\leqslant|s+1|$，$\therefore(2s+2t)^2\leqslant(s+1)^2$，$\therefore 3s^2+8st+4t^2-2s-1\leqslant 0$，即 $4t^2+8s\cdot t+(3s^2-2s-1)\leqslant 0$（看成关于 t 的一元二次不等式），$\therefore(2t+3s+1)(2t+s-1)\leqslant 0$，令 $t=x$，$s=y$，

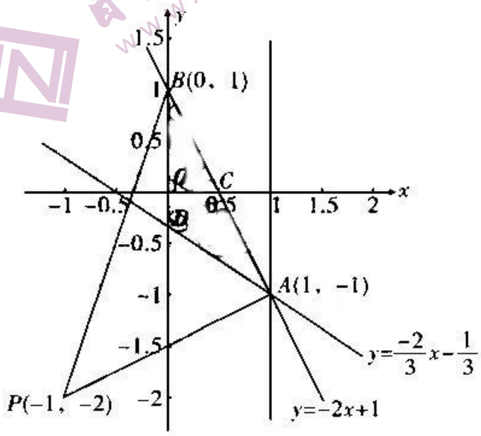


图4

则 $\begin{cases}(2x+3y+1)(2x+y-1)\leqslant 0,\\ 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$ 则问题等价于点 (x, y) 满足可行域

$\begin{cases}(2x+3y+1)(2x+y-1)\leqslant 0,\\ 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$ 为如图 4 阴影部分时，$\dfrac{y+2}{x+1}$ 的取值范围．由线性规划知识可知 $\dfrac{y+2}{x+1}$ 为点 (x, y) 与点 $(-1, -2)$ 连线的斜率，由图可得 $\dfrac{y+2}{x+1}\in\left[\dfrac{1}{2}, 3\right]$，

$\therefore \dfrac{t+1}{t+s+3}=\dfrac{x+1}{(x+1)+y+2}=\dfrac{1}{1+\dfrac{y+2}{x+1}}\in\left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{2}{3}\right]$，故选A.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	$2x+y+1=0$	$\dfrac{2}{3}$	$1-2\sqrt{2}$	6

【解析】

13. ∵ $f'(x)=\dfrac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$，∴斜率 $k=f'(0)=-2$．又∵ $f(0)=-1$，∴切线方程为 $y-(-1)=-2x$，即 $2x+y+1=0$.

14. 由已知 $\vec{a}\perp(2\vec{a}-\vec{b})$，得 $\vec{a}\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=2|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2|\vec{a}|^2$．又 $|\vec{b}|=3|\vec{a}|$，所以 $\cos\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{2|\vec{a}|^2}{3|\vec{a}|^2}=\dfrac{2}{3}$.

15. 由题意，取线段 AB 的中点 $M(-1, 1)$，由 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PM}^2-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2$，因为圆心 $O(0, 0)$ 到 $M(-1, 1)$ 的距离为 $|OM|=\sqrt{2}$，所以 $|\overrightarrow{PM}|$ 的最小值为 $\sqrt{2}-1$，又∵ $|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{2}$，故最小值为 $1-2\sqrt{2}$.

16. 如图 5，不妨设 $BD=CD=2$，$AH=h(h>0)$，

∵ $AD=AB$，∴ $BH=HD=1$，$\tan B=h$，$\tan C=\dfrac{h}{3}$，

$\tan A=-\tan(B+C)=\dfrac{\tan B+\tan C}{\tan B\tan C-1}=\dfrac{4h}{h^2-3}$，∴ $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C=\dfrac{h^2}{3}\times\dfrac{4h}{h^2-3}=\dfrac{4h^3}{3(h^2-3)}$．令 $f(h)=\dfrac{4h^3}{3(h^2-3)}$，

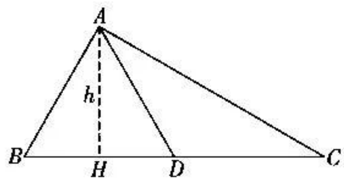


图 5

$f'(h)=\dfrac{h^2-9}{9(h^2-3)^2}\cdot 12h^2$，令 $f'(h)=0$，可得 $h=3$，$f(h)$ 在 $(0, 3)$ 上单减，在 $(3, +\infty)$ 上单增，$f(h)_{\min}=f(3)=6$，所以 $\tan A+\tan B+\tan C$ 的最小值为 6.

三、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 12 分）

解：（1）由统计数据填写 2×2 列联表，如下：

	年龄低于 40 岁的人数	年龄不低于 40 岁的人数	总计
有意向购买冰墩墩的人数	50	25	75
无意向购买冰墩墩的人数	5	20	25
总计	55	45	100

……………………………………………………（2 分）

则 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\dfrac{100\times(50\times20-25\times5)^2}{75\times25\times55\times45}\approx16.498>10.828$,

……………………………………………………（5 分）

因此有99.9% 的把握认为购买冰墩墩与人的年龄有关.

……………………………………………………（6 分）

（2）X 的所有可能取值为 0，1，2，3，　……………………………………（7 分）

$P(X=0)=\dfrac{C_3^3}{C_7^3}=\dfrac{1}{35}$，　$P(X=1)=\dfrac{C_3^2\cdot C_4^1}{C_7^3}=\dfrac{12}{35}$,

$P(X=2)=\dfrac{C_3^1\cdot C_4^2}{C_7^3}=\dfrac{18}{35}$，　$P(X=3)=\dfrac{C_4^3}{C_7^3}=\dfrac{4}{35}$，　……………………………（9 分）

故 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{35}$	$\dfrac{12}{35}$	$\dfrac{18}{35}$	$\dfrac{4}{35}$

X 的期望 $E(X)=0\times\dfrac{1}{35}+1\times\dfrac{12}{35}+2\times\dfrac{18}{35}+3\times\dfrac{4}{35}=\dfrac{12}{7}$.

……………………………………………………（12 分）

18. （本小题满分 12 分）

解：（1）由 $\frac{3}{2S_n}=\frac{1}{a_n-2}-\frac{1}{a_n+4}=\frac{6}{(a_n-2)(a_n+4)}$,

$4S_n=a_n^2+2a_n-8$,

$4S_{n+1}=a_{n+1}^2+2a_{n+1}-8$,

$4a_{n+1}=4(S_{n+1}-S_n)=a_{n+1}^2-a_n^2+2(a_{n+1}-a_n)$,

$2(a_{n+1}+a_n)=a_{n+1}^2-a_n^2=(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)$.

$\because a_n>0$,

$\therefore a_{n+1}+a_n\neq 0$，$a_{n+1}-a_n=2$. ……………………………………………（4 分）

当 $n=1$ 时，$4a_1=a_1^2+2a_1-8$，得 $a_1=-2$ 或 $a_1=4$.

$\because a_n>0$，$a_1=4$，

$\therefore a_n=a_1+2(n-1)=2n+2$. ……………………………………………（6 分）

（2）$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=n^2+3n$,

记 $b_n=(-1)^n(S_n-3n)=(-1)^n\cdot n^2$，其前 n 项和 $T_n=-1^2+2^2-3^2+4^2+\cdots+(-1)^n n^2$,

当 n 为偶数时，

$T_n=-1^2+2^2-3^2+4^2+\cdots+n^2$

$=(2-1)(2+1)+(4-3)(4+3)+\cdots+[n-(n-1)][n+(n-1)]$

$=1+2+3+4+\cdots+n-1+n$

$=\frac{n(n+1)}{2}$;

当 n 为奇数时，$T_n=T_{n+1}-b_{n+1}$

$=\frac{(n+1)(n+2)}{2}-(-1)^{n+1}\cdot(n+1)^2$

$=\frac{n^2+3n+2}{2}-(n+1)^2$

$=-\frac{n(n+1)}{2}$.

所以 $T_n=(-1)^n\frac{n(n+1)}{2}$. ……………………………………………………（12 分）

19. （本小题满分 12 分）

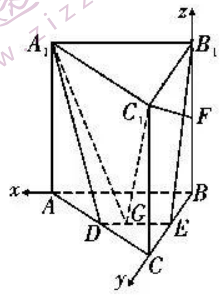


图 6

（1）证明：如图 6，连接 A_1D，B_1E，

∵ D，E分别是AC，BC的中点，

∴ $DE//AB//A_1B_1$，

∴ D，E，A_1，B_1四点在同一平面内.

∵ $C_1F\perp A_1B_1$，

∴ $C_1F\perp DE$. ……………………………………………………（2 分）

在侧面 CBB_1C_1 中，因为 $\tan\angle B_1C_1F=\tan\angle EB_1B=\frac{1}{2}$，则 $\angle B_1C_1F=\angle EB_1B$，

∴ $\angle EB_1B+\angle B_1FC_1=\angle B_1C_1F+\angle B_1FC_1=\frac{\pi}{2}$，

∴ $C_1F\perp B_1E$. ……………………………………………………（4 分）

又 $DE\cap B_1E=E$，

∴ $C_1F\perp$平面DEB_1A_1，

又 $A_1G\subset$平面 DEB_1A_1，

∴ $C_1F\perp A_1G$. ……………………………………………………（6 分）

（2）解：∵ $A_1B_1\perp B_1B$，$A_1B_1\perp C_1F$，$B_1B\cap C_1F=F$，

∴ $A_1B_1\perp$平面C_1CBB_1. ……………………………………………………（7 分）

如图建立空间直角坐标系，设 $EG=t$，$t\in[0,1]$，

（2）显然直线l的斜率不为0，设直线l的方程为$x=my+1$，设定点$Q(t,\ 0)$，

联立方程组$\begin{cases}x=my+1,\\x^2+2y^2=2,\end{cases}$ 消x可得$(m^2+2)y^2+2my-1=0$，

设$M(x_1,\ y_1)$，$N(x_2,\ y_2)$，

可得$y_1+y_2=-\dfrac{2m}{m^2+2}$，$y_1y_2=-\dfrac{1}{m^2+2}$，

…………（6分）

所以$\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{QN}=(x_1-t)(x_2-t)+y_1y_2=(my_1+1-t)(my_2+1-t)+y_1y_2$

$=(m^2+1)\dfrac{-1}{m^2+2}+m(1-t)\dfrac{-2m}{m^2+2}+(1-t)^2=\dfrac{(2t-3)m^2-1}{m^2+2}+(1-t)^2$，

…………（8分）

要使上式为定值，则$2t-3=-\dfrac{1}{2}$，解得$t=\dfrac{5}{4}$， …………（10分）

此时$\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{QN}=-\dfrac{1}{2}+\left(1-\dfrac{5}{4}\right)^2=-\dfrac{7}{16}$，

所以，存在点$Q\left(\dfrac{5}{4},\ 0\right)$，使得$\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{QN}$为定值$-\dfrac{7}{16}$. …………（12分）

21．（本小题满分12分）

解：（1）$f'(x)=e^x(2e^x+a)$. …………（1分）

当$a\geqslant0$时，$f'(x)>0$恒成立，所以$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增；

…………（2分）

当$a<0$时，令$f'(x)=e^x(2e^x+a)>0$，解得$x>\ln\left(-\dfrac{a}{2}\right)$，

令$f'(x)=e^x(2e^x+a)<0$，解得$x<\ln\left(-\dfrac{a}{2}\right)$，

所以$f(x)$在$\left(\ln\left(-\dfrac{a}{2}\right),+\infty\right)$上单调递增，在$\left(-\infty,\ln\left(-\dfrac{a}{2}\right)\right)$上单调递减.

…………（4分）

（2）显然$x=0$不是$f(x)=g(x)$的解，由$f(x)=g(x)$得，$a=\dfrac{x^2-e^{2x}}{xe^x}(x\neq0)$，

…………（5分）

$A_1(2,0,2)$，$B_1(0,0,2)$，$C_1(0,2,2)$，$E(0,1,0)$，$G(t,1,0)$，

则设平面 A_1B_1E 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$.

又 $\overrightarrow{A_1B_1}=(-2,0,0)$，$\overrightarrow{B_1E}=(0,1,-2)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{B_1E}=0,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}-2x=0,\\ y-2z=0,\end{cases}$ $\therefore \vec{m}=(0,2,1)$.

设平面 A_1C_1G 的法向量为 $\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1G}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}-2x_1+2y_1=0,\\ (t-2)x+y-2z=0,\end{cases}$ $\therefore \vec{n}=\left(1,1,\dfrac{t-1}{2}\right)$，

……………………………………………………（9 分）

$$\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\frac{2+\frac{t-1}{2}}{\sqrt{5}\times\sqrt{2+\frac{(t-1)^2}{4}}}=\frac{t+3}{\sqrt{5}\times\sqrt{t^2-2t+9}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\times\sqrt{\frac{t^2+6t+9}{t^2-2t+9}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\times\sqrt{1+\frac{8t}{t^2-2t+9}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\times\sqrt{1+\frac{8}{t+\frac{9}{t}-2}}.$$

……………………………………（10 分）

当 $t=1$ 时，取得最大值 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，

故二面角 $C_1-A_1G-B_1$ 平面角的余弦值的最大值是 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

……………………………………………………（12 分）

20．（本小题满分 12 分）

解：（1）由题意 $A(-\sqrt{2},0)$，$B(\sqrt{2},0)$，

设动点 $P(x,y)$，则 $\dfrac{y-0}{x-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{y-0}{x+\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}$，

化简得轨迹 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1\ (y\neq 0)$.

……………………………………………（4 分）

令 $h(x)=\dfrac{x^2-e^{2x}}{xe^x}-a$，则 $h'(x)=\dfrac{(1-x)(x^2+e^{2x})}{x^2e^x}$，

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $h(x)=0$ 至多有 3 个零点，且这三个零点分别分布在 $(-\infty,0)$，$(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上.

……………………………………………………（7 分）

当 $a\geqslant\dfrac{1}{e}-e$ 时，则 $h(1)=\dfrac{1}{e}-e-a\leqslant0$，

所以 $h(x)$ 至多有两个零点，不符题意，舍去；　……………………………………（8 分）

当 $a<\dfrac{1}{e}-e$，$h(1)=\dfrac{1}{e}-e-a>0$，

若 $x>1$，则有 $h(x)=\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{e^x}{x}-a<1-\dfrac{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{x}-a$，

取 $x_1=4-4a>1$，则 $h(x_1)<0$，则 $h(x)$ 在 $(1,x_1)$ 上至少有一个零点；

若 $x\in(0,1)$，$h(x)=\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{e^x}{x}-a<x-\dfrac{1}{x}-a$，取 $x_2=\dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\in(0,1)$，则 $h(x_2)<0$，

则 $h(x)$ 在 $(x_2,1)$ 上至少有一个零点，

取 $h(-1)=-e+\dfrac{1}{e}-a>0$，若 $x<-1$，$h(x)=\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{e^x}{x}-a<e^x-\dfrac{1}{e^x}-a$，

取 $x_3=\ln\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right)-1<-1$，则 $h(x_3)<0$，$h(x)$ 在 $(x_3,-1)$ 上至少有一个零点，

这说明当 $a<\dfrac{1}{e}-e$ 时，$h(x)$ 恰有三个不同的解.

综上，当 $a<\dfrac{1}{e}-e$ 时，$h(x)$ 有三个不同的解.　……………………………………（12 分）

22. （本小题满分 10 分）【选修 4-4：坐标系与参数方程】

解：（1）由曲线 C 的极坐标方程 $\rho=2\cos\theta$，可得 $\rho^2=2\rho\cos\theta$，

将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入可得 $x^2+y^2=2x$，即 $(x-1)^2+y^2=1$，

即曲线 C 的直角坐标方程为 $(x-1)^2+y^2=1$.　……………………………………（4 分）

（2）如图7，设$P(x,y)$，设$M(1+\cos\theta,\sin\theta)$，$N(1-\cos\theta,\sin\theta)$，

其中M，N不与原点重合，即$\cos\theta\neq-1$且$\cos\theta\neq1$.

设ON的直线方程为$y=\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}x$，

令$x=\cos\theta+1$，得$y=\dfrac{\sin\theta(\cos\theta+1)}{1-\cos\theta}$，

即点P的轨迹C_1的参数方程为$\begin{cases}x=\cos\theta+1,\\ y=\dfrac{\sin\theta(\cos\theta+1)}{1-\cos\theta},\end{cases}$（$\theta$为参数，$\cos\theta\neq-1$，$\cos\theta\neq1$）.

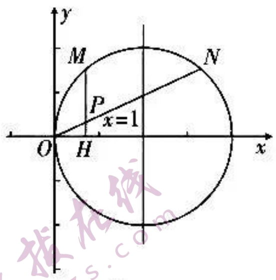


图7

……………………………………………………………（10分）

23．（本小题满分10分）【选修4-5：不等式选讲】

解：（1）函数$f(x)=|2x+6|+|2x-4|-11=\begin{cases}-4x-13, & x<-3,\\ -1, & -3\leqslant x<2,\\ 4x-9, & x\geqslant2,\end{cases}$

$g(x)=-|x-1|=\begin{cases}x-1, & x\leqslant1,\\ -x+1, & x>1,\end{cases}$ 所以图象如图8.

……………………………………………（5分）

（2）$g(x+t)\leqslant f(x)$表示$y=g(x)$平移$|t|$个单位后，图象恒不高于$y=f(x)$的图象，结合图象可得$y=g(x)$向右至少平移2个单位或者向左平移至少5个单位，所以有$t\leqslant-2$或者$t\geqslant5$.

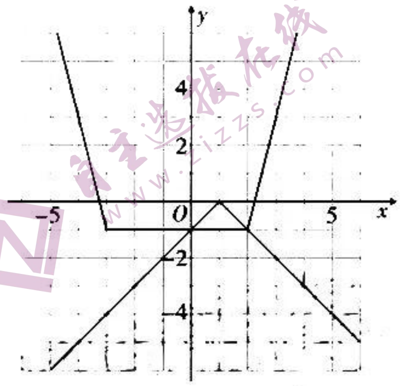


图8

……………………………………………………………（10分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。