绝密★启用并使用完毕前

2021 年 4 月阶段性检测

数学试题

本试卷共 4 页，22 题，全卷满分 150 分.考试用时 120 分钟.

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上.

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

参考公式：锥体的体积公式：$V=\frac{1}{3}Sh$（其中 S 为锥体的底面积，h 为锥体的高）

第Ⅰ卷

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合 $A=\{x|x^2-x-2=0\}$，$B=\{x|ax=1\}$，若 $A\cap B=B$，则 $a=$

A.$-\frac{1}{2}$或 1　　B.$\frac{1}{2}$或-1　　C.$-\frac{1}{2}$或 1 或 0　　D.$\frac{1}{2}$或-1 或 0

2.已知复数 $z=\frac{1-\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}$，i 是虚数单位，则复数 $\bar{z}$ 的虚部是

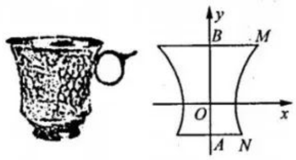
A.$\frac{1}{25}$　　B.$\frac{-1}{25}\mathrm{i}$　　C.$\frac{7}{25}$　　D.$\frac{7}{25}\mathrm{i}$

3.已知 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$，若 $0<a<b<1$，则下列各式中正确的是

A. $f(a)<f(b)<f(\frac{1}{a})<f(\frac{1}{b})$　　B. $f(\frac{1}{a})<f(\frac{1}{b})<f(b)<f(a)$

C. $f(a)<f(b)<f(\frac{1}{b})<f(\frac{1}{a})$　　D. $f(\frac{1}{a})<f(a)<f(\frac{1}{b})<f(b)$

4.如图为陕西博物馆收藏的国宝—唐・金筐宝钿团花纹金杯，杯身曲线内收，玲珑娇美，巧夺天工，是唐代金银细作的典范之作.该杯的主体部分可以近似看作是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右支与直线 $x=0,y=4,y=-2$ 围成的曲边四边形 $ABMN$ 绕 y 轴旋转一周得到的几何体，若该金杯主体部分的上口外直径为 $\frac{2\sqrt{57}}{3}$，下底外直径为 $\frac{2\sqrt{21}}{3}$，则双曲线 C 的离心率为



A.2　　B.$\sqrt{2}$　　C.$\sqrt{3}$　　D.3

5.某食品的保鲜时间 y（单位：h）与储藏温度 x（单位：℃）满足函数关系 $y=\mathrm{e}^{kx+3b}$（$\mathrm{e}=2.718\cdots$ 为自然对数的底数，k,b 为常数）.若该食品在储藏温度为 0℃时的保鲜时间是 216 小时，在储藏温度为 22℃时的保鲜时间为 54 小时，则该食品在储藏温度为 33℃时的保鲜时间是

A.18 h　　B.27 h　　C.54 h　　D.81 h

6.设随机变量 $X \sim N(0,1)$，$f(x)=P(X \geqslant x)$，其中 $x>0$，则下列等式成立的是

A. $f(2x)=2f(x)$　　　　B. $f(-x)=1-f(x)$

C. $P(X \leqslant x)=2f(x)-1$　　　　D. $P(|X|>x)=2-f(x)$

7.已知 $(1+|a|x+|b|y)^n$ 展开式中不含 x 的项的系数和为 256，不含 y 的项的系数和为 81，则 a,b,n 的值可能为

A. $a=3,b=2,n=3$　　　　B. $a=2,b=3,n=3$

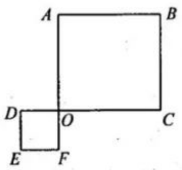
C. $a=-2,b=-3,n=4$　　　　D. $a=-3,b=-2,n=4$

8.设函数 $f_1(x)=x^2-1$，$f_2(x)=e^{-|x-\frac{1}{2}|}$，$f_3(x)=\frac{1}{3}\sin 2\pi x$，$a_i=\frac{i}{99}$，$i=0,1,2,\cdots,99$.记 $I_k=|f_k(a_1)-f_k(a_0)|+|f_k(a_2)-f_k(a_1)|+\cdots+|f_k(a_{99})-f_k(a_{98})|$，$k=1,2,3$，则

A. $I_1<I_2<I_3$　　B. $I_3<I_2<I_1$　　C. $I_1<I_3<I_2$　　D. $I_2<I_1<I_3$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

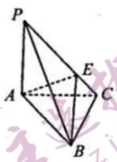
9.已知四边形 $OABC$ 和四边形 $ODEF$ 为正方形，$\overrightarrow{OC}+3\overrightarrow{OD}=\vec{0}$，$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{OB}=12$.则下列说法正确的是



A. $|\overrightarrow{OA}|=3$　　　　B. $|\overrightarrow{OE}|=1$

C. $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{CF}=3$　　　　D. $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DF}=-2$

10.在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$平面 ABC，$AC\perp BC$，且 $PA=AC=BC=2$，E 为线段 PC 上的一个动点，则下列选项正确的是



A.三棱锥 $P-ABC$ 的表面积是 $4+4\sqrt{2}$

B.直线 PC 与直线 AB 所成的角为 60°

C. $|AE|+|BE|$ 的最小值为 $\sqrt{2}+\sqrt{6}$

D.三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为 12π

11.已知函数 $f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x}$，下列选项正确的是

A. 函数 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上为减函数，在 $(0,+\infty)$ 上为增函数

B. 当 $x_1>x_2>0$ 时，$\frac{f(x_1)}{x_2^2}>\frac{f(x_2)}{x_1^2}$

C.若方程 $f(|x|)=a$ 有 2 个不相等的解，则 a 的取值范围为 $(0,+\infty)$

D. $(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1})\ln 2 \leqslant \ln n$，$n\geqslant 2$ 且 $n\in \mathbf{N}_+$

12.已知直线 l 过抛物线 $C:x^2=-4y$ 的焦点 F，且直线 l 与抛物线 C 交于 A,B 两点，过 A,B 两点分别作抛物线 C 的切线，两切线交于点 G，设 $A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$，$G(x_G,y_G)$.则下列选项正确的是

A. $y_A\cdot y_B=4$　　　　B. 以线段 AB 为直径的圆与直线 $y=\frac{3}{2}$ 相离

C.当 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$ 时，$|AB|=\frac{9}{2}$　　　　D. $\triangle GAB$ 面积的取值范围为 $[4,+\infty)$

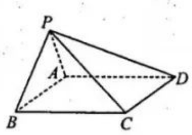
第Ⅱ卷

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13.已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$（$\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}$），函数 $f(x)$ 的对称中心与对称轴 $x=\frac{\pi}{4}$ 的最小距离为 $\frac{\pi}{6}$，则 $f(x)=$________.

14.已知 a,b,c 均为正实数，且 $\frac{ab}{a+2b}\geqslant\frac{1}{3},\frac{bc}{b+2c}\geqslant\frac{1}{4},\frac{ca}{c+2a}\geqslant\frac{1}{5}$，那么 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 的最大值为________.

15.如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，侧面 $PAB\perp$ 底面 $ABCD$，$AB=2$，$\angle BPA=60°$，当 $\triangle PAB$ 面积最大时，若四棱锥 $P-ABCD$ 存在内切球，则内切球的体积为________，此时四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为________.（本题第一空2分，第二空3分）



16.数列 $\{a_n\}$ 共12项，且 $a_1=1,a_4=2$，关于 x 的函数 $f_n(x)=\frac{x^3}{3}-a_nx^2+(a_n^2-1)x+1$，$n\in N_+$，若 $x=a_{n+1}(1\leqslant n\leqslant 11)$ 是函数 $f_n(x)$ 的极值点，且曲线 $y=f_4(x)$ 在点 $(a_{12},f_4(a_{12}))$ 处的切线的斜率为3，则满足条件的数列 $\{a_n\}$ 的个数为________.

四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10分）

非直角 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，

$2b^2\cos A=(b^2+c^2-a^2)(\cos A-\sin A)$.

(1)求角 C；

(2)若 $c=2\sqrt{10}$，D 为 BC 中点，在下列条件中任选一个，求 AD 的长度.

条件① $\sin B=\frac{\sqrt{5}}{5}$；

② $\triangle ABC$ 的面积为 $S=4$，且 $B>A$.

18.（12分）

数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，$a_{n+1}=2S_n+1$.

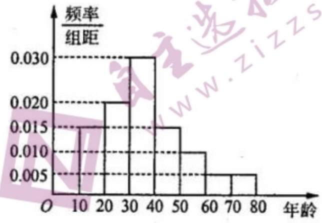
(1)求 a_n，S_n；

(2)设 $b_n=\frac{a_n}{S_nS_{n+1}}$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n.证明：$\frac{1}{4}\leqslant T_n<\frac{1}{3}$.

19.（12分）

2020年初，面对突如其来的新冠肺炎疫情，山东省体育局适时推出“云走齐鲁”线上万人健步走活动，全省14万人参赛，掀起了一场前所未有的“健步走热潮”，为举办全民健身网络赛事活动提供了“山东范例”. 今年山东将继续举办线上万人健步走活动，希望带动更多的人参与到全民健身中来，以更加强健的体魄、更加优异的成绩，向中国共产党百年华诞献礼.为了解群众参与健步走活动的情况，随机从参与活动的某支队伍中抽取了60人，将他

们的年龄分成7段：[10,20),[20,30),[30,40),[40,50),[50,60),[60,70),[70,80]后得到如图所示的频率分布直方图.



(1)以各组的区间中点值代表各组取值的平均水平，求这60人年龄的平均数，并求中位数的估计值；

(2)若从样本中年龄在[50,70)的居民中任取3人，这3人中年龄不低于60岁的人数为X，求X的分布列及数学期望；

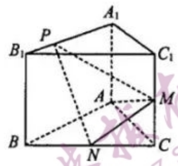
(3)一支200人的队伍，男士占其中的$\frac{3}{8}$，40岁以下的男士和女士分别为30和70人，通过计算判断是否有95%的把握认为40岁以下的群众是否参与健步走活动与性别有关.

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(K^2\geqslant k_0)$	…	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	…	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

20.(12分)

如图，已知三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，四边形AA_1C_1C为正方形，$AB=AC=2$，$AM\perp A_1B_1$，M、N分别是CC_1、BC的中点，点P是线段A_1B_1上的动点.



(1)证明：$AM\perp PN$；

(2)已知$BC=2\sqrt{2}$，求平面PMN与平面ABC所成锐二面角的余弦值的取值范围.

21.(12分)

已知圆$A:(x+1)^2+y^2=16$，$B(1,0)$，M为圆A上任意一点，线段BM的垂直平分线交AM于点N，点N的轨迹为W.

(1)求轨迹W的方程；

(2)过点B的直线l_1，l_2的斜率分别为k_1、k_2，$k_1+k_2=-1$，l_1交W于点C、D，l_2交W于点E、F，线段CD与EF的中点分别是G、H，判断直线GH是否过定点，若过定点，求出该定点，若不过定点，说明理由.

22.(12分)

已知函数$f(x)=xe^x-ax^2$，其中$e=2.718\cdots$为自然对数的底数.

(1)若函数$f(x)$在$(1,f(1))$处的切线与直线$x-2y+2=0$垂直，求函数$f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程.

(2)若对任意的$x\in(0,+\infty)$，$\frac{f(x)}{x}-a(\frac{1+\ln x}{x}+1-x)\geqslant 0$恒成立.

(i)求实数a的取值范围；

(ii)若函数$g(x)=e^x+\sin x+1$，证明：$x\ln(x+a-1)<g'(x)-1$.

2021 年 4 月阶段性检测

数学参考答案及评分细则

一、选择题

1-5：DCCAB，6—8：BCD

二、选择题

9.ACD　　10.ABD　　11.BD　　12.BCD

三、填空题

13. $f(x)=2\sin(3x-\frac{\pi}{4})$　　　　14.　4

15. $\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi$，$\frac{8}{3}$　　　　16.　336

四、解答题

17. 解：ΔABC 中，由余弦定理知，$b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$，由 $2b^2\cos A=(b^2+c^2-a^2)(\cos A-\sin A)$，

所以，$2b^2\cos A=2bc\cos A(\cos A-\sin A)$，　　(1 分)

由 $\cos A\neq 0$，即 $b=c(\cos A-\sin A)$　　(2 分)

由正弦定理知，$\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}$，得 $\sin B=\sin C(\cos A-\sin A)$，

所以，$\sin(A+C)=\sin C(\cos A-\sin A)$，　　(3 分)

即 $\sin A\cos C+\cos A\sin C=\sin C\cos A-\sin C\sin A$，

所以，$\sin C\cos A=-\sin C\sin A$，　　(4 分)

因为 $\sin A\neq 0$，所以 $\cos c=-\sin c$，所以 $\tan c=-1$，

又 $0<c<\pi$，所以 $c=\frac{3}{4}\pi$．　　(5 分)

(2)若选择条件①，

因为 $\sin B=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\cos B=\sqrt{1-\sin B^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　(6 分)

又 $\sin<BAC=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\frac{\sqrt{10}}{10}$，　　(7 分)

由正弦定理知，$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin<BAC}$，所以 $a=\frac{c\sin<BAC}{\sin C}=2\sqrt{2}$，　　(8 分)

又 D 为 BC 中点，所以 $BD=\sqrt{2}$，　　(9 分)

在 ΔABC 中，由余弦定理知 $AD^2=AB^2+BD^2-2AB\bullet BD\cos B$，

得 $AD=\sqrt{26}$．（10 分）

若选择条件②，

因为 ΔABC 的面积 $S=4=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\sin\frac{3\pi}{4}$，所以 $ab=8\sqrt{2}$，（6 分）

由余弦定理知 $c^2=(2\sqrt{10})^2=40=a^2+b^2-2ab\cos\frac{3\pi}{4}$，（7 分）

所以，$a^2+b^2+\sqrt{2}ab=40$，

由 $\begin{cases}a^2+b^2+\sqrt{2}ab=40\\ab=8\sqrt{2}\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=4\\b=2\sqrt{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=2\sqrt{2}\\b=4\end{cases}$．（8 分）

因为 $B>A$，所以 $b>a$，所以 $\begin{cases}a=2\sqrt{2}\\b=4\end{cases}$，又 D 为 BC 中点，所以 $CD=\sqrt{2}$，（9 分）

在 ΔACD 中，$AD^2=CA^2+CD^2-2CA\bullet CD\cos C=16+2-2\times4\times\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4}=26$，

所以 $AD=\sqrt{26}$．（10 分）

18 题评分细则：

（1）$\because a_{n+1}=2S_n+1$ ……①

$\therefore a_n=2S_{n-1}+1(n\ge2)$ ……② ……1 分

①－②得：

$a_{n+1}=3a_n(n\ge2)$ ……2 分

令 n=1 时，

$a_2=2a_1+1=3=3a_1$ 满足上式

$\therefore a_{n+1}=3a_n(n\ge1)$

$\therefore$ 数列$\{a_n\}$是以a_1为首项3为公比的等比数列。……3 分

$\therefore a_n=a_1\cdot q^{n-1}=3^{n-1}$ ……4 分

$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{1-3^n}{1-3}=\frac{3^n-1}{2}$ ……5 分

注：没有验证 $a_2=3a_1$ 扣 1 分

数学参考答案及评分细则第2页（共 14 页）

(2) 证明:

由①得：$a_n=3^{n-1},S_n=\dfrac{3^n-1}{2}$

$\therefore S_{n+1}=\dfrac{3^{n+1}-1}{2}$

$\therefore b_n=\dfrac{a_n}{S_nS_{n+1}}=\dfrac{4\cdot 3^{n-1}}{(3^n-1)(3^{n+1}-1)}=\dfrac{2}{3}(\dfrac{1}{3^n-1}-\dfrac{1}{3^{n+1}-1})$……7 分

$\therefore T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$=\dfrac{2}{3}(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{26}+\cdots+\dfrac{1}{3^n-1}-\dfrac{1}{3^{n+1}-1})$

$=\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3^{n+2}-3}$……9 分

$\therefore T_n<\dfrac{1}{3}$……10 分

又$\because T_n$为递增数列

$\therefore T_n\ge T_1=\dfrac{4\cdot 3^0}{(3-1)(9-1)}=\dfrac{1}{4}$……11 分

$\therefore \dfrac{1}{4}\le T_n<\dfrac{1}{3}$……12 分

注：没有结论扣 1 分

19 题.

(1) 这 60 人年龄的平均数为

$15\times0.15+25\times0.2+35\times0.3+45\times0.15+55\times0.1+65\times0.05+75\times0.05=37$……1 分

前两组所占频率之和为$(0.015+0.020)\times10=0.35$,

前三组数据频率之和为$(0.015+0.020+0.030)\times10=0.65$,

设中位数估计值为x，则$0.35+0.030\times10\times(x-30)=0.5$，解得$x=35$. ……3 分

(2) 由题意可知，年龄在[50，60) 内的人数为 6，[60，70) 内的人数为 3，X 的可能取值有 0，1，2，3.……4 分

$$p(X=0)=\frac{C_6^3C_3^0}{C_9^3}=\frac{20}{84}=\frac{5}{21}$$

$$P(X=1)=\frac{C_6^2C_3^1}{C_9^3}=\frac{45}{84}=\frac{15}{28}$$

$$P(X=2)=\frac{C_6^1C_3^2}{C_9^3}=\frac{18}{84}=\frac{3}{14}$$

$$P(X=3)=\frac{C_6^0C_3^3}{C_9^3}=\frac{1}{84}$$

........6 分（求概率共 2 分，错 1 个扣 1 分，扣完为止）

$\therefore X$的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{21}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{84}$

.........7 分（若无求概率过程直接列表，则表中只要错 1 个数据就不得分）

$$E(X)=\frac{45+36+3}{84}=1$$

.................8 分

(3) 由题意队伍中男士共 75 人，女士 125 人，则2×2列联表如下：

	40 岁以下	40 岁以上	合计
男士	30	45	75
女士	70	55	125
合计	100	100	200

$$K^2=\frac{200\times(30\times55-70\times45)^2}{100\times100\times75\times125}=4.8$$

..........10 分（若计算正确，不列联表不扣分）

$\because 4.8>3.841$

.....................11 分

所以，有 95%的把握认为 40 岁以下的群众是否参与健步走活动与性别有关 ...12 分

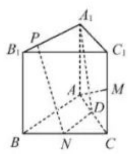
20．评分细则：

(1)取 AC 中点 D，连接 DN，A_1D

$\because AA_1=AC$，$AD=CM$，$\angle A_1AC=\angle ACM$

$\therefore \triangle A_1AD\cong\triangle ACM$ （1 分）

$\therefore \angle AA_1D=\angle CAM$



又∵$\angle AA_1D+\angle A_1DA=\frac{\pi}{2}$

∴$\angle CAM+\angle A_1DA=\frac{\pi}{2}$

∴$AM\perp A_1D$　　(2 分)

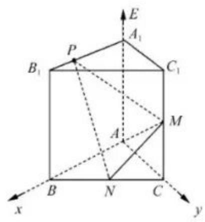
又∵$AM\perp A_1B_1$　　$A_1B_1\cap A_1D=A_1$

∴$AM\perp$面 A_1B_1ND　　(4 分)注不写 $A_1B_1\cap A_1D=A_1$ 扣 1 分

又∵$NP\subset$面 A_1B_1ND　　注不写 $NP\subset$面 A_1B_1ND 不扣分

∴$AM\perp PN$　　(5 分)

(2)∵$AB=AC$，$BC=2\sqrt{2}$



∴$AB^2+AC^2=BC^2$

∴$AB\perp AC$

∵$AM\perp A_1B_1$，$A_1B_1/\!/AB$

∴$AM\perp AB$

又∵$AM\cap AC=A$

∴$AB\perp$面 ACC_1A_1

∴$AB\perp AA_1$

以 AB，AC，AA_1 为 x，y，z 建系　(7 分)

(注：建系过程无证明，只得结果 1 分)

$N(1，1，0)$ $M(0，2，1)$　设 $P(t，0，2)$ $t\in[0，2]$

设面 MNP 的法向量$\vec{n}=(x，y，z)$

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{NM}=(x，y，z)\cdot(-1，1，1)=-x+y+z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{MP}=(x，y，z)\cdot(t-1，-1，2)=(t-1)x-y+z=0\end{cases}$$

令 $x=1$　得 $y=\frac{1+t}{3}$，$z=\frac{2-t}{3}$　　(8 分)

又面 ABC 的法向量$\vec{m}=(0，0，1)$

设面 PMN 与面 ABC 所成角为 θ

则$|\cos\theta|=|\cos\langle\vec{m}，\vec{n}\rangle|=\left|\frac{\frac{2-t}{3}}{\sqrt{1+\left(\frac{1+t}{2}\right)^2}}\right|=\sqrt{\frac{(2-t)^2}{9+(1+t)^2+(2-t)^2}}$　(9 分)

令 $u=2-t$　∵$t\in[0，2]$　∴$u\in[0，2]$

$|\cos\theta|=\sqrt{\frac{u^2}{2u^2-6t+18}}$

当 $u=0$ 时　$\cos\theta=0$　∴$\theta=\frac{\pi}{2}$不符合　舍去

当 $u\neq0$ 时　$|\cos\theta|=\sqrt{\frac{1}{\frac{18}{u^2}-\frac{6}{u}+2}}$

令 $m=\frac{1}{u}\geq\frac{1}{2}$　$|\cos\theta|=\sqrt{\frac{1}{18m^2-6m+2}}$

∵$\varphi(m)=18m^2-6m+2$ 在$[\frac{1}{2}，+\infty)$递增

$\therefore \varphi(m) \geqslant \varphi(\frac{1}{2})=\frac{7}{2}$ $\therefore 0<\sqrt{\frac{1}{\varphi(m)}} \leq \sqrt{\frac{2}{7}}=\frac{\sqrt{14}}{7}$ （11 分）

所以 $0<|\cos\theta| \leqslant \frac{\sqrt{14}}{7}$

又∵θ 为锐角 ∴$|\cos\theta|$的范围为$(0,\frac{\sqrt{14}}{7}]$ （12 分）

21.（1）解∵ $|AN|+|BN|=|AN|+|BM|=4>|AB|$

∴ N的轨迹是以A，B为焦点的椭圆,2a=4，2c=2 （2 分）

∴ a=2，$b=\sqrt{3}$, c =1

∴ w的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ （4 分）

注：1.不写 N 的轨迹扣一分，不写 4>|AB|不扣分

2.没写 a,b,c 的值，直接写 w 的方程，若正确不扣分。

3.没中间过程，只有最后结果只得 1 分。

（2）由题意得F（1,0），直线L_1, L_2的方程分别是：$y=k_1(x-1)$, $y=k_2(x-1)$

设$C(x_3,y_3)$, $D(x_4,y_4)$

联立$\begin{cases} y=k_1(x-1) \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$,得$(3+4k_1^2)x^2-8k_1^2x+4k_1^2-12=0$,

所以 $x_3+x_4=\frac{8k_1^2}{3+4k_1^2}$,

则 G$\left(\frac{4k_1^2}{3+4k_1^2},\frac{-3k_1}{3+4k_1^2}\right)$, （6 分）

同理 H$\left(\frac{4k_2^2}{3+4k_2^2},\frac{-3k_2}{3+4k_2^2}\right)$, （7 分）

所以 $k_{GH}=\dfrac{\frac{-3k_1}{3+4k_1^2}-\frac{-3k_2}{3+4k_2^2}}{\frac{4k_1^2}{3+4k_1^2}-\frac{4k_2^2}{3+4k_2^2}}=\dfrac{k_1k_2-\frac{3}{4}}{k_1+k_2}$, （8 分）

由 $k_1+k_2=-1$ 得 $k_{GH}=\frac{3}{4}+k_1(k_1+1)$，　(9 分　)

所以直线 GH 的方程为 $y+\frac{3k_1}{3+4k_1^2}=\left(k_1^2+k_1+\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{4k_1^2}{3+4k_1^2}\right)$

整理得 $y=\left(k_1^2+k_1+\frac{3}{4}\right)(x-1)+\frac{3}{4}$，　(11 分)

所以直线 GH 过定点 $\left(1,\frac{3}{4}\right)$.　(12 分)

22.题评分细则:

(1) $f'(x)=(x+1)e^x-2ax$，$f'(1)=2e-2a=-2$，————1 分

$a=e+1$，$f(1)=e-a=-1$ ————2 分

$y+1=-2(x-1), y=-2x+1$ ————3 分

注：1）直线方程不化简的不扣分

2）无过程的只有结果的只给结果 1 分

(2) 方法一:

由 $\frac{f(x)}{x}-a(\frac{1+\ln x}{x}+1-x)\geq 0$

得 $\frac{xe^x-ax^2}{x}-a(\frac{1+\ln x}{x}+1-x)\geq 0$ 对 $x>0$ 恒成立

即 $xe^x-a\ln x-ax-a\geq 0$ 对 $x>0$ 恒成立

即 $xe^x-a(\ln x+x+1)\geq 0$ 对 $x>0$ 恒成立

设 $h(x)=xe^x-a(\ln x+x+1)$ 即 $h(x)\geq 0$ 对 $x>0$ 恒成立————4 分

①当 $a=0$ 时，$h(x)=xe^x>0$ 对 $x>0$ 恒成立————5 分

$h'(x)=(x+1)e^x-a(1+\frac{1}{x})=(x+1)(e^x-\frac{a}{x})=(x+1)\frac{(xe^x-a)}{x}$

②当 $a<0$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上为增函数

数学参考答案及评分细则第7页（共 14 页）

当 $0<x<1$ 时，$h(x)=xe^x-a(\ln x+x+1)<e-a(\ln x+2)$

$h(e^{\frac{e}{a}-2})<e-a(\ln e^{\frac{e}{a}-2}+2)=e-a\times\frac{e}{a}=0$

不合题意 ——————6 分

③当 $a>0$ 时，设 $t(x)=xe^x-a$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上为增函数

又 $t(0)=-a<0,t(a)=a(e^a-1)>0$

所以 $\exists x_0\in(0,a)$ 使 $t(x_0)=0$ 即 $x_0e^{x_0}=a$

所以，当 $0<x<x_0$时，$t(x)<0,h'(x)<0,h(x)$为减函数

当 $x>x_0$时，$t(x)>0,h'(x)>0,h(x)$为增函数

则当$x=x_0$时，

$h_{\min}(x)=h(x_0)=x_0e^{x_0}-a(x_0+\ln x_0+1)$

$=x_0e^{x_0}-a(\ln x_0e^{x_0}+1)$

$=a-a(\ln a+1)\ge 0$

所以$a\ln a\le 0$

因为$a>0$

所以$0<a\le 1$ ——————7 分

综上 $0\le a\le 1$ ——————8 分

注：此解法中有两处需要取点，若没有取点，用趋势表达的不扣分，两种方式都没写的，最后总分中扣 1 分，若有一处写了，不扣分

方法二：

由 $\frac{f(x)}{x}-a(\frac{1+\ln x}{x}+1-x)\ge 0$

得 $\frac{xe^x-ax^2}{x}-a(\frac{1+\ln x}{x}+1-x)\ge 0$对$x>0$恒成立

即 $xe^x-a\ln x-ax-a\ge 0$ 对 $x>0$ 恒成立

即 $xe^x-a(\ln x+x+1)\ge 0$ 对 $x>0$ 恒成立

即 $xe^x-a(\ln xe^x+1)\ge 0$ 对 $x>0$ 恒成立

设 $t=xe^x$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上为增函数，则 $t>0$

并设 $G(t)=t-a(\ln t+1)$ 问题转化为 $G(t)\ge 0$ 对 $t>0$ 恒成立__________4 分

①当 $a=0$ 时，$G(t)=t>0$ 对 $t>0$ 恒成立______________5 分

$G'(t)=1-\frac{a}{t}=\frac{t-a}{t}$

②当 $a<0$ 时，$G'(t)>0$，$G(t)$ 在 $t\in(0,+\infty)$ 上为增函数

当 $0<t<1$ 时，$G(t)=t-a(\ln t+1)<1-a(\ln t+1)$

$$G(e^{\frac{1}{a}-1})<1-a(\ln e^{\frac{1}{a}-1}+1)=1-a\times\frac{1}{a}=0$$

不合题意 ______________6 分

③当 $a>0$ 时，当 $0<t<a$ 时，$G'(t)<0,G(t)$ 为减函数

当 $t>a$ 时，$G'(t)>0,G(t)$ 为增函数

则当 $t=a$ 时，

$G_{\min}(t)=G(a)=a-a(\ln a+1)\ge 0$

所以 $a\ln a\le 0$

因为 $a>0$

所以 $0<a\le 1$ ____________________________7 分

综上 $0\le a\le 1$ ____________________________8 分

注：此解法中有一处需要取点，若没有取点，用趋势表达的不扣分，两种方式都没写的，最后总分中扣 1 分。

方法三：

由 $\frac{f(x)}{x}-a(\frac{1+\ln x}{x}+1-x)\geq 0$

得 $\frac{xe^x-ax^2}{x}-a(\frac{1+\ln x}{x}+1-x)\geq 0$ 对 $x>0$ 恒成立

即 $xe^x-a\ln x-ax-a\geq 0$ 对 $x>0$ 恒成立

即 $xe^x-a(\ln x+x+1)\geq 0$ 对 $x>0$ 恒成立

即 $e^{x+\ln x}-a(x+\ln x+1)\geq 0$ 对 $x>0$ 恒成立

设 $t=x+\ln x$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上为增函数，则 $t\in R$

并设 $G(t)=e^t-a(t+1)$ 问题转化为 $G(t)\geq 0$ 对 $t\in R$ 恒成立____________4 分

①当 $a=0$ 时，$G(t)=e^t>0$ 对 $t\in R$ 恒成立_______________5 分

②当 $a<0$ 时，当 $t<0$ 时，$G(t)=e^t-a(t+1)<1-a(t+1)$

$$G(\frac{1}{a}-1)<1-a(\frac{1}{a}-1+1)=1-a\times\frac{1}{a}=0$$

不合题意 _____________6 分

③当 $a>0$ 时，$G'(t)=e^t-a$ 当 $t<\ln a$ 时，$G'(t)<0,G(t)$ 为减函数

当 $t>\ln a$ 时，$G'(t)>0,G(t)$ 为增函数

则当 $t=\ln a$ 时，

$G_{\min}(t)=G(\ln a)=a-a(\ln a+1)\geq 0$

所以 $a\ln a\leq 0$

因为 $a>0$

所以 $0<a\leq 1$ ____________________________7 分

综上 $0\leq a\leq 1$ ____________________________8 分

注：此解法中有一处需要取点，若没有取点，用趋势表达的不扣分，两种方式都

没写的，最后总分中扣 1 分。

方法四:

由 $\frac{f(x)}{x}-a(\frac{1+\ln x}{x}+1-x)\geq 0$

得 $\frac{xe^x-ax^2}{x}-a(\frac{1+\ln x}{x}+1-x)\geq 0$ 对 $x>0$ 恒成立

即 $xe^x-a\ln x-ax-a\geq 0$ 对 $x>0$ 恒成立

即 $xe^x-a(\ln x+x+1)\geq 0$ 对 $x>0$ 恒成立

设 $h(x)=\ln x+x+1$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上为增函数，

且 $h(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}>0, h(\frac{1}{e^2})=\frac{1}{e^2}-1<0$

所以 $\exists x_0\in(\frac{1}{e^2},\frac{1}{e})$ 使 $h(x_0)=1+x_0+\ln x_0=0$

所以，当 $0<x<x_0$ 时，$h(x)<0$,

当 $x>x_0$ 时，$h(x)>0$,

①当 $x=x_0$ 时，$1+x+\ln x=0$，$a(1+x_0+\ln x_0)\leq x_0e^{x_0}$ 成立

$G(x)=\frac{xe^x}{1+x+\ln x}(x\neq x_0)$

$$G'(x)=\frac{(x+1)e^x(1+x+\ln x)-xe^x(1+\frac{1}{x})}{(1+x+\ln x)^2}$$

$$=\frac{(x+1)e^x(1+x+\ln x)-xe^x(x+1)}{(1+x+\ln x)^2}$$

$=\dfrac{(x+1)e^x(x+\ln x)}{(1+x+\ln x)^2}$

设 $p(x)=\ln x+x$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上为增函数,

且 $p(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}-1<0, p(1)=1>0$

所以 $\exists x_1\in(\frac{1}{e},1)$ 使 $p(x_1)=x_1+\ln x_1=0$

②当 $x>x_0$ 时，即 $1+x+\ln x>0$ 时, $a\le\dfrac{xe^x}{1+x+\ln x}$ 对 $x\in(x_0,+\infty)$ 恒成立

当 $x_0<x<x_1$ 时, $p(x)<0, G'(x)<0, G(x)$ 为减函数

当 $x>x_1$ 时，$p(x)>0, G'(x)>0, G(x)$ 为增函数

则当 $x=x_1$ 时，

$G_{\min}(x)=G(x_1)=\dfrac{x_1e^{x_1}}{1+\ln x_1+x_1}=x_1e^{x_1}$

又 $x_1+\ln x_1=0$ 所以 $x_1e^{x_1}=e^{x_1+\ln x_1}=e^0=1$

则当 $x=x_1$ 时，

$G_{\min}(x)=G(x_1)=1$

——————————5 分

所以 $a\le G(x_1)=1$

——————————————6 分

③当 $0<x<x_0$ 时，即 $1+x+\ln x<0$ 时, $a\ge\dfrac{xe^x}{1+x+\ln x}$ 对 $x\in(0,x_0)$ 恒成立当

$0<x<x_0$ 时, $p(x)<0, G'(x)<0, G(x)$ 为减函数

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x}{1+x+\ln x}=0$

所以 $a\geq 0$ ————————————7 分

综上 $0\leq a\leq 1$ ————————————8 分

③证明：因为 $g(x)=e^x+\sin x+1$

所以 $g'(x)=e^x+\cos x$

要证明 $x\ln(x+a-1)<g'(x)-1$ 成立

只需证明 $x\ln(x+a-1)<e^x+\cos x-1$ 成立

因为 $0\leq a\leq 1$，所以 $x\ln(x+a-1)\leq x\ln x$

原问题转化为证明 $x\ln x<e^x+\cos x-1$ ————————————9 分

(i)当 $x\in(0,1]$ 时，$x\ln x\leq 0$，$e^x-1>0,\cos x>0$

所以 $e^x+\cos x-1>0$ 所以 $x\ln x<e^x+\cos x-1$ 成立

所以 $x\ln(x+a-1)<e^x+\cos x-1$ 成立————————————10 分

(ii)当 $x\in(1,+\infty)$ 时，设 $H(x)=e^x+\cos x-1-x\ln x$

$H'(x)=e^x-\sin x-1-\ln x$

$H''(x)=e^x-\cos x-\dfrac{1}{x}$

因为 $x>1$

所以 $e^x>e,0<\dfrac{1}{x}<1,-1\leq\cos x\leq 1$

所以 $H''(x)>0$

所以 $H'(x)$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上为增函数————————————11 分

所以 $H'(x)>H'(1)=e-1-\sin 1>0$

所以 $H(x)$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上为增函数

所以 $H(x)>H(1)=e+\cos 1-1>0$

所以$x\ln x < e^x + \cos x - 1$

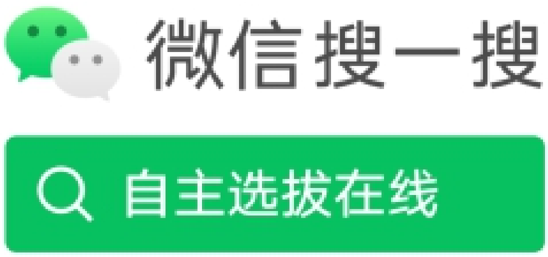
所以$x\ln(x+a-1) < e^x + \cos x - 1$成立————————12 分

综上$x\ln(x+a-1) < e^x + \cos x - 1$成立

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》