# 长郡中学2023届高三月考试卷(七)

## 数学参考答案

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | C | D | A | C | D | C | A | C |

1.C 【解析】过程略.注:《名师导学·新高考第二轮总复习》$P_2$.

2.D 【解析】过程略.注:《名师导学·新高考第二轮总复习》$P_5$.

4.C 【解析】过程略.注:《名师导学·新高考第二轮总复习》$P_{11}$.

5.D 【解析】$a_{n+1}+(-1)^n\cdot a_n=3n-1$,故$a_2-a_1=2$,$a_3+a_2=5$,$a_4-a_3=8$,$a_5+a_4=11$,$\cdots$,

故$a_1+a_3=3$,$a_5+a_7=3$,$\cdots$,

从第一项开始,依次取2个相邻奇数项的和都等于3;

$a_2+a_4=13$,$a_6+a_8=37$,$\cdots$,

从第二项开始,依次取2个相邻偶数项的和构成以13为首项,以24为公差的等差数列.

故$S_{60}=3\times15+13\times15+\frac{15\times14}{2}\times24=2760$.

故选D.

注:《名师导学·新高考第二轮总复习》P[illegible].

二、选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

| 题号 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|
| 答案 | CD | ABD | ACD | ACD |

9.CD 【解析】对于A,对数据排序得到1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,由$10\times70\%=7$,70%分位数是$\frac{7+8}{2}=7.5$,A错误;

对于B,由$X\sim B\left(6,\frac{1}{3}\right)$知$D(X)=6\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}$,故B错误;

对于C,因为$P(A\bar{B})+P(AB)=P(A)$,即$P(AB)=P(A)-P(A\bar{B})$,又$P(A\bar{B})=P(A)\cdot[1-P(B)]$,

即$P(A)P(B)=P(A)-P(AB)$,所以$P(AB)=P(A)P(B)$,故$A$与$B$独立,故C正确;

对于D,由题设,对应正态曲线关于$x=2$对称,所以$P(2\leqslant x<3)=P(1<x\leqslant2)=0.68-0.5=0.18$,故D正确.

故选CD.

10.ABD 【解析】由题意得:$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\varphi\right)=0$,所以$\frac{4\pi}{3}+\varphi=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,即$\varphi=-\frac{4\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

又$0<\varphi<\pi$,所以$k=2$时,$\varphi=\frac{2\pi}{3}$,故$f(x)=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$.

对A,当$x\in\left(0,\frac{5\pi}{12}\right)$时,$2x+\frac{2\pi}{3}\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{2}\right)$,由正弦函数$y=\sin u$图象知$y=f(x)$在$\left(0,\frac{5\pi}{12}\right)$上单调递减;

对B,当$x\in\left(-\frac{\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right)$时,$2x+\frac{2\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right)$,由正弦函数$y=\sin u$图象知$y=f(x)$只有1个极值点,

由$2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}$,解得$x=\frac{5\pi}{12}$,即$x=\frac{5\pi}{12}$为函数的唯一极值点;

对C,当$x=\frac{7\pi}{6}$时,$2x+\frac{2\pi}{3}=3\pi$,$f\left(\frac{7\pi}{6}\right)=0$,直线$x=\frac{7\pi}{6}$不是对称轴;

对D,由$y'=2\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=-1$得:$\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$,

解得$2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$或$2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,从而得:$x=k\pi$或$x=\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

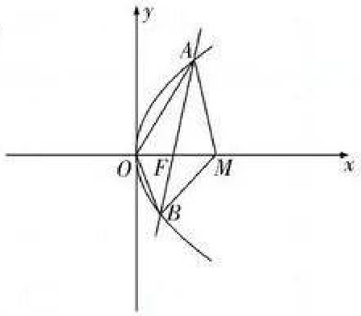
所以函数 $y=f(x)$ 在点 $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 处的切线斜率为 $k=y'|_{x=0}=2\cos\frac{2\pi}{3}=-1$,

切线方程为:$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-(x-0)$ 即 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}-x$.

故选 ABD.

注:《名师导学·新高考第二轮总复习》$P_{17}$.

11. ACD 【解析】对于 A,易得 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$,由 $|AF|=|AM|$ 可得点 $A$ 在 $FM$ 的




垂直平分线上,则 $A$ 点横坐标为 $\frac{\frac{p}{2}+p}{2}=\frac{3p}{4}$,

代入抛物线可得 $y^2=2p\cdot\frac{3p}{4}=\frac{3}{2}p^2$,则 $A\left(\frac{3p}{4},\frac{\sqrt{6}p}{2}\right)$,

则直线 $AB$ 的斜率为 $\frac{\frac{\sqrt{6}p}{2}}{\frac{3p}{4}-\frac{p}{2}}=2\sqrt{6}$,A 正确;

对于 B,由斜率为 $2\sqrt{6}$ 可得直线 $AB$ 的方程为 $x=\frac{1}{2\sqrt{6}}y+\frac{p}{2}$,联立抛物线方程得 $y^2-\frac{1}{\sqrt{6}}py-p^2=0$,

设 $B(x_1,y_1)$,则 $\frac{\sqrt{6}}{2}p+y_1=\frac{\sqrt{6}}{6}p$,则 $y_1=-\frac{\sqrt{6}p}{3}$,代入抛物线得 $\left(-\frac{\sqrt{6}p}{3}\right)^2=2p\cdot x_1$,解得 $x_1=\frac{p}{3}$,

则 $B\left(\frac{p}{3},-\frac{\sqrt{6}p}{3}\right)$,则 $|OB|=\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{6}p}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}p}{3}\neq|OF|=\frac{p}{2}$,B 错误;

对于 C,由抛物线定义知:$|AB|=\frac{3p}{4}+\frac{p}{3}+p=\frac{25p}{12}>2p=4|OF|$,C 正确;

对于 D,$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left(\frac{3p}{4},\frac{\sqrt{6}p}{2}\right)\cdot\left(\frac{p}{3},-\frac{\sqrt{6}p}{3}\right)=\frac{3p}{4}\cdot\frac{p}{3}+\frac{\sqrt{6}p}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{6}p}{3}\right)=-\frac{3p^2}{4}<0$,则 $\angle AOB$ 为钝角,

又 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\left(-\frac{p}{4},\frac{\sqrt{6}p}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2p}{3},-\frac{\sqrt{6}p}{3}\right)=-\frac{p}{4}\cdot\left(-\frac{2p}{3}\right)+\frac{\sqrt{6}p}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{6}p}{3}\right)=-\frac{5p^2}{6}<0$,则 $\angle AMB$ 为钝角,又 $\angle AOB+\angle AMB+\angle OAM+\angle OBM=360^\circ$,则 $\angle OAM+\angle OBM<180^\circ$,D 正确.

故选 ACD.

12. ACD 【解析】对于选项 A:取 $B_1C_1$,$C_1C$ 中点 $E$,$F$,连接 $D_1E$,$D_1F$,$EF$,$PF$.

由 $PF/\!/B_1C_1/\!/A_1D_1$ 且 $PF=B_1C_1=A_1D_1$ 知 $A_1PFD_1$ 是平行四边形,

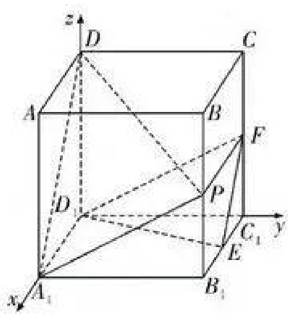
$\therefore D_1F/\!/A_1P$,$\because D_1F\not\subset$ 平面 $A_1PD$,$A_1P\subset$ 平面 $A_1PD$,

$\therefore D_1F/\!/$ 平面 $A_1PD$,公众号:数学北极星

同理可得 $EF/\!/$ 平面 $A_1PD$,$\because EF\cap D_1F=F$,

$\therefore$ 平面 $A_1PD/\!/$ 平面 $D_1EF$,则 $Q$ 点的轨迹为线段 $EF$,A 选项正确;

对于选项 B:如图,建立空间直角坐标系,




则 $A_1(1,0,0)$,$P\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$,$D(0,0,1)$,设 $Q(x,1,z)$,$0\leqslant x,z\leqslant 1$,

则 $\overrightarrow{A_1D}=(-1,0,1)$,$\overrightarrow{A_1P}=\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$,$\overrightarrow{D_1Q}=(x,1,z)$.

设 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$ 为平面 $A_1PD$ 的一个法向量,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1D}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1P}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-a+c=0,\\ b+\frac{c}{2}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=c,\\ b=-\frac{c}{2}.\end{cases}$ 取 $c=1$,则 $\boldsymbol{m}=\left(1,-\frac{1}{2},1\right)$.

若 $D_1Q\perp$ 平面 $A_1PD$,则 $\overrightarrow{D_1Q}/\!/\boldsymbol{m}$,即存在 $\lambda\in\mathbf{R}$,使得 $\overrightarrow{D_1Q}=\lambda\boldsymbol{m}$,则 $\begin{cases}x=\lambda,\\ 1=-\frac{\lambda}{2},\\ z=\lambda,\end{cases}$ 解得

$x=z=-2\notin[0,1]$,故不存在点 $Q$ 使得 $D_1Q\perp$ 平面 $A_1PD$,B 选项错误;

对于选项 C:$\triangle A_1PD$ 的面积为定值,$\therefore$ 当且仅当 $Q$ 到平面 $A_1PD$ 的距离 $d$ 最大时,三棱锥 $Q-A_1PD$ 的体积

最大，$d=\dfrac{|\overrightarrow{A_1Q}\cdot \boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{2}{3}\left|x+z-\dfrac{3}{2}\right|$，

①若 $x+z\leqslant\dfrac{3}{2}$，则 $d=1-\dfrac{2}{3}(x+z)$，故当 $x+z=0$ 时，$d$ 有最大值 1；

②若 $x+z>\dfrac{3}{2}$，则 $d=\dfrac{2}{3}(x+z)-1$，故当 $x+z=2$ 时，$d$ 有最大值 $\dfrac{1}{3}$；

综上，当 $x+z=0$，即 $Q$ 和 $C_1$ 重合时，三棱锥 $Q-A_1PD$ 的体积最大，C 选项正确；

对于选项 D：$D_1C_1\perp$ 平面 $BB_1C_1C$，∴$D_1C_1\perp C_1Q$，$D_1Q=\sqrt{D_1C_1^2+C_1Q^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，∴$C_1Q=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$Q$ 点的轨迹是半径为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，圆心角为 $\dfrac{\pi}{2}$ 的圆弧，轨迹长度为 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$，D 选项正确.

故选 ACD.

**三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.**

13. $\dfrac{35}{8}$　**【解析】**过程略. 注：《名师导学·新高考第二轮总复习》$P_{12}$.

14. $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$　$\dfrac{4}{5}$　**【解析】**过程略. 注：《名师导学·新高考第二轮总复习》$P_{12}$.

15. 3　**【解析】**过程略. 注：《名师导学·新高考第二轮总复习》$P_{13}$.

16. $\dfrac{1}{4}$　**【解析】**因为 $f'(x)=x^2-a_{n+1}\cos x+(a_n+2)$ 有唯一的零点，$f'(x)$ 为偶函数，

则 $f'(0)=0$，可得 $a_{n+1}-a_n=2$，$n\in\mathbf{N}^*$，数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，所以 $a_2-a_1=2$.

又因为 $g(x)=8x-\sin\pi x+\cos\pi x=8x-\sqrt{2}\sin\pi\left(x-\dfrac{1}{4}\right)=8\left(x-\dfrac{1}{4}\right)-\sqrt{2}\sin\pi\left(x-\dfrac{1}{4}\right)+2$，

令 $h(t)=8t-\sqrt{2}\sin\pi t$，则 $h(t)$ 为奇函数，因为 $h'(t)>0$，所以 $h(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

由题意得 $[g(a_1)-2]+[g(a_2)-2]+\cdots+[g(a_9)-2]=0$，

∵数列 $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的等差数列，其中 $a_1+a_9=a_2+a_8=\cdots=2a_5$，

则 $a_1-\dfrac{1}{4}$，$a_2-\dfrac{1}{4}$，…，$a_9-\dfrac{1}{4}$，假设 $\left(a_1-\dfrac{1}{4}\right)+\left(a_9-\dfrac{1}{4}\right)>0$，

$\left(a_1-\dfrac{1}{4}\right)>-\left(a_9-\dfrac{1}{4}\right)\Rightarrow h\left(a_1-\dfrac{1}{4}\right)>-h\left(a_9-\dfrac{1}{4}\right)\Rightarrow h\left(a_1-\dfrac{1}{4}\right)+h\left(a_9-\dfrac{1}{4}\right)>0$.

∵$\left(a_1-\dfrac{1}{4}\right)+\left(a_9-\dfrac{1}{4}\right)=\left(a_2-\dfrac{1}{4}\right)+\left(a_8-\dfrac{1}{4}\right)=\left(a_3-\dfrac{1}{4}\right)+\left(a_7-\dfrac{1}{4}\right)=\left(a_4-\dfrac{1}{4}\right)+\left(a_6-\dfrac{1}{4}\right)=2\left(a_5-\dfrac{1}{4}\right)$，

∴$h\left(a_1-\dfrac{1}{4}\right)+h\left(a_2-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+h\left(a_9-\dfrac{1}{4}\right)>0$.

假设 $\left(a_1-\dfrac{1}{4}\right)+\left(a_9-\dfrac{1}{4}\right)<0$，同理可得 $h\left(a_1-\dfrac{1}{4}\right)+h\left(a_2-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+h\left(a_9-\dfrac{1}{4}\right)<0$，

综上，$\left(a_1-\dfrac{1}{4}\right)+\left(a_9-\dfrac{1}{4}\right)=0\Rightarrow a_1+a_9=\dfrac{1}{2}\Rightarrow a_5=\dfrac{1}{4}$.

**四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

17. **【解析】**(1) 因为 $\sin C\sin(A-B)=\sin B\sin(C-A)$，

所以 $\sin C\sin A\cos B-\sin C\sin B\cos A=\sin B\sin C\cos A-\sin B\sin A\cos C$，……………… 2 分

所以 $ac\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-2bc\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-ab\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，……………… 3 分

即 $\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2}-(b^2+c^2-a^2)=-\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}$，所以 $2a^2=b^2+c^2$. ……………… 5 分

(2) 因为 $a=5$，$\cos A=\dfrac{25}{31}$，由 (1) 得 $b^2+c^2=50$，

由余弦定理可得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，则 $50-\dfrac{50}{31}bc=25$，所以 $bc=\dfrac{31}{2}$，……………… 8 分

故 $(b+c)^2=b^2+c^2+2bc=50+31=81$，所以 $b+c=9$，

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=14$. ……………… 10 分

18. **【解析】**(1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 $q$，因为 $a_1$ 为 $a_2$，$a_3$ 的等差中项，

所以 $2a_1=a_2+a_3, a_1\neq 0$，所以 $q^2+q-2=0$.

又 $q\neq 1$，所以 $q=-2$. ………………………………………………………… 4 分

(2)设 $\{na_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，$a_1=1, a_n=(-2)^{n-1}$，

$S_n=1\times 1+2\times(-2)+3\times(-2)^2+\cdots+n(-2)^{n-1}$，①

$-2S_n=1\times(-2)+2\times(-2)^2+3\times(-2)^3+\cdots+(n-1)(-2)^{n-1}+n(-2)^n$，② ………………………… 8 分

①－②得，$3S_n=1+(-2)+(-2)^2+\cdots+(-2)^{n-1}-n(-2)^n$

$=\dfrac{1-(-2)^n}{1-(-2)}-n(-2)^n=\dfrac{1-(1+3n)(-2)^n}{3}$，

$\therefore S_n=\dfrac{1-(1+3n)(-2)^n}{9}$. ………………………………………………………… 12 分

19.【解析】(1)因为 $AD=CD$，$E$ 为 $AC$ 的中点，所以 $AC\perp DE$；

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 中，因为 $AD=CD$，$\angle ADB=\angle CDB$，$DB=DB$，

所以 $\triangle ABD\cong\triangle CBD$，所以 $AB=CB$，又因为 $E$ 为 $AC$ 的中点，所以 $AC\perp BE$； ………………………… 3 分

又因为 $DE, BE\subset$ 平面 $BED$，$DE\cap BE=E$，所以 $AC\perp$ 平面 $BED$，

因为 $AC\subset$ 平面 $ACD$，所以平面 $BED\perp$ 平面 $ACD$. ………………………………………… 5 分

(2)连接 $EF$，由(1)知，$AC\perp$ 平面 $BED$，因为 $EF\subset$ 平面 $BED$，

所以 $AC\perp EF$，所以 $S_{\triangle AFC}=\frac{1}{2}AC\cdot EF$，

当 $EF\perp BD$ 时，$EF$ 最小，即 $\triangle AFC$ 的面积最小. ………………………………………… 6 分

因为 $\triangle ABD\cong\triangle CBD$，所以 $CB=AB=2$，

又因为 $\angle ACB=60°$，所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形，

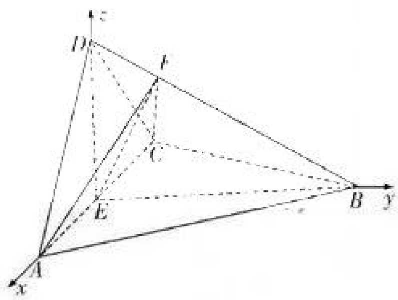
因为 $E$ 为 $AC$ 的中点，所以 $AE=EC=1$，$BE=\sqrt{3}$，

因为 $AD\perp CD$，所以 $DE=\frac{1}{2}AC=1$，

在 $\triangle DEB$ 中，$DE^2+BE^2=BD^2$，所以 $BE\perp DE$.

以 $E$ 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系 $E-xyz$. ……… 8 分

则 $A(1,0,0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$D(0,0,1)$，所以 $\overrightarrow{AD}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{AB}=(-1,\sqrt{3},0)$，




设平面 $ABD$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=-x+z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-x+\sqrt{3}y=0,\end{cases}$ 取 $y=\sqrt{3}$，则 $\boldsymbol{n}=(3,\sqrt{3},3)$，

又因为 $C(-1,0,0)$，$F\left(0,\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{3}{4}\right)$，所以 $\overrightarrow{CF}=\left(1,\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{3}{4}\right)$，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{CF}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CF}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{CF}|}=\dfrac{6}{\sqrt{21}\times\sqrt{\frac{7}{4}}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$，

设 $CF$ 与平面 $ABD$ 所成的角为 $\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{CF}\rangle|=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$，

所以 $CF$ 与平面 $ABD$ 所成的角的正弦值为 $\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$. ………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)$\bar{x}=(36.2\times 0.2+36.4\times 0.25+36.6\times 0.7+36.8\times 0.8+37\times 1.1+37.2\times 0.8+37.4\times 0.65+37.6\times 0.4+37.8\times 0.05+38\times 0.05)\times 0.2=37$. ………………………………………… 2 分

所以 $P(36.4\leqslant X\leqslant 37.6)=P(37-2\times 0.3\leqslant X\leqslant 37+2\times 0.3)=0.9545$. ………………………… 3 分

所以恰好有一颗不是“标准果”的概率 $P=C_{20}^{19}\times 0.9545^{19}\times(1-0.9545)\approx 0.37$. ………………………… 5 分

(2)由 $\frac{1}{2}m+\frac{1}{4}m+\frac{1}{8}m=1$ 得，$m=\frac{8}{7}$. ………………………………………………………… 6 分

所以 $P(X_2=i)=\frac{8}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^i$，$i=1,2,3$. ………………………………………………………… 7 分

采用 $A$ 款包装盒获得利润的数学期望为：

$E_A=80-4E(X_1)-a=80-4\left[1\times\frac{1}{2}+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]-a=\frac{147}{2}-a.$ ……………… 8 分

采用 $B$ 款包装盒获得利润的数学期望为：

$E_B=80-4E(X_2)-\frac{8}{7}a=80-4\left(1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{2}{7}+3\times\frac{1}{7}\right)-\frac{8a}{7}=\frac{516}{7}-\frac{8a}{7}.$ ……………… 9 分

因为 $E_A-E_B=\left(\frac{147}{2}-a\right)-\left(\frac{516}{7}-\frac{8}{7}a\right)=\frac{a}{7}-\frac{3}{14}, 1\leqslant a\leqslant 5$,

所以当 $1\leqslant a<\frac{3}{2}$ 时，$E_A<E_B$，选择 $B$ 款包装盒获得利润更大； ……………… 10 分

当 $a=\frac{3}{2}$ 时，$E_A=E_B$，选择 $A$、$B$ 款包装盒获得利润一样； ……………… 11 分

当 $\frac{3}{2}<a\leqslant 5$ 时，$E_A>E_B$，选择 $A$ 款包装盒获得利润更大. ……………… 12 分

21.【解析】(1)抛物线 $C$ 的焦点为 $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$，$|FM|=\frac{p}{2}+4$,

所以，$F$ 与圆 $M: x^2+(y+4)^2=1$ 上点的距离的最小值为 $\frac{p}{2}+4-1=4$,

解得 $p=2$ ……………… 4 分

(2)抛物线 $C$ 的方程为 $x^2=4y$，即 $y=\frac{x^2}{4}$，对该函数求导得 $y'=\frac{x}{2}$,

设点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x_0,y_0)$,

直线 $PA$ 的方程为 $y-y_1=\frac{x_1}{2}(x-x_1)$，即 $y=\frac{x_1x}{2}-y_1$，即 $x_1x-2y_1-2y=0$.

同理可知，直线 $PB$ 的方程为 $x_2x-2y_2-2y=0$.

由于点 $P$ 为这两条直线的公共点，则 $\begin{cases}x_1x_0-2y_1-2y_0=0,\\x_2x_0-2y_2-2y_0=0.\end{cases}$

所以，点 $A$、$B$ 的坐标满足方程 $x_0x-2y-2y_0=0$.

所以，直线 $AB$ 的方程为 $x_0x-2y-2y_0=0$. ……………… 7 分

联立 $\begin{cases}x_0x-2y-2y_0=0,\\y=\frac{x^2}{4},\end{cases}$ 可得 $x^2-2x_0x+4y_0=0$.

由韦达定理可得 $x_1+x_2=2x_0$，$x_1x_2=4y_0$.

所以，$|AB|=\sqrt{1+\left(\frac{x_0}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+\left(\frac{x_0}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{4x_0^2-16y_0}=\sqrt{(x_0^2+4)(x_0^2-4y_0)}$,

点 $P$ 到直线 $AB$ 的距离为 $d=\frac{|x_0^2-4y_0|}{\sqrt{x_0^2+4}}$,

所以，$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\sqrt{(x_0^2+4)(x_0^2-4y_0)}\cdot\frac{|x_0^2-4y_0|}{\sqrt{x_0^2+4}}=\frac{1}{2}(x_0^2-4y_0)^{\frac{3}{2}}$,

$\because x_0^2-4y_0=1-(y_0+4)^2-4y_0=-y_0^2-12y_0-15=-(y_0+6)^2+21$,

由已知可得 $-5\leqslant y_0\leqslant -3$,

所以，当 $y_0=-5$ 时，$\triangle PAB$ 的面积取最大值 $\frac{1}{2}\times 20^{\frac{3}{2}}=20\sqrt{5}$. ……………… 12 分

22.【解析】(1) $f'(x)=ae^{ax}\sin x+e^{ax}\cos x=e^{ax}(a\sin x+\cos x)=\sqrt{a^2+1}\,e^{ax}\sin(x+\varphi)$,

其中 $\tan\varphi=\frac{1}{a}$，$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$.

令 $f'(x)=0$，由 $x\geqslant 0$ 得 $x+\varphi=m\pi$，即 $x=m\pi-\varphi$，$m\in\mathbf{N}^*$.

对 $k\in\mathbf{N}$，若 $2k\pi<x+\varphi<(2k+1)\pi$，即 $2k\pi-\varphi<x<(2k+1)\pi-\varphi$，则 $f'(x)>0$;

若 $(2k+1)\pi<x+\varphi<(2k+2)\pi$，即 $(2k+1)\pi-\varphi<x<(2k+2)\pi-\varphi$，则 $f'(x)<0$.

因此，$f(x)$ 在区间 $((m-1)\pi, m\pi-\varphi)$ 与 $(m\pi-\varphi, m\pi)$ 上的符号总相反.

于是当 $x=m\pi-\varphi(m\in\mathbf{N}^*)$ 时，$f(x)$ 取得极值，所以 $x_n=n\pi-\varphi(n\in\mathbf{N}^*)$.

此时，$f(x_n)=e^{a(n\pi-\varphi)}\sin(n\pi-\varphi)=(-1)^{n+1}e^{a(n\pi-\varphi)}\sin\varphi$. 易知 $f(x_n)\neq 0$,

而 $\frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)}=\frac{(-1)^{n+2}e^{a[(n+1)\pi-\varphi]}\sin\varphi}{(-1)^{n+1}e^{a(n\pi-\varphi)}\sin\varphi}=-e^{a\pi}$ 是常数,

故数列$\{f(x_n)\}$是首项为$f(x_1)=e^{a(\pi-\varphi)}\sin\varphi$，公比为$-e^{a\pi}$的等比数列. ………………………………… 5分

(2)由(1)知，$\sin\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$，于是对一切$n\in\mathbf{N}^*$，$x_n<|f(x_n)|$恒成立，即$n\pi-\varphi<\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}e^{a(n\pi-\varphi)}$恒成立，

等价于$\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a}<\dfrac{e^{a(n\pi-\varphi)}}{a(n\pi-\varphi)}$(*)恒成立(因为$a>0$)，

设$g(t)=\dfrac{e^t}{t}(t>0)$，则$g'(t)=\dfrac{e^t(t-1)}{t^2}$，令$g'(t)=0$得$t=1$.

当$0<t<1$时，$g'(t)<0$，所以$g(t)$在区间$(0,1)$上单调递减；

当$t>1$时，$g'(t)>0$，所以$g(t)$在区间$(1,+\infty)$上单调递增.

从而当$t=1$时，函数$g(t)$取得最小值$g(1)=e$. ……………………………………………… 8分

因此，要使(*)式恒成立，只需$\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a}<g(1)=e$，即只需$a>\dfrac{1}{\sqrt{e^2-1}}$.

而当$a=\dfrac{1}{\sqrt{e^2-1}}$时，由$\tan\varphi=\dfrac{1}{a}=\sqrt{e^2-1}>\sqrt{3}$且$0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$.

于是$\pi-\varphi<\dfrac{2\pi}{3}<\sqrt{e^2-1}$，且当$n\geqslant2$时，$n\pi-\varphi\geqslant2\pi-\varphi>\dfrac{3\pi}{2}>\sqrt{e^2-1}$.

因此对一切$n\in\mathbf{N}^*$，$ax_n=\dfrac{n\pi-\varphi}{\sqrt{e^2-1}}\neq1$，所以$g(ax_n)>g(1)=e=\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a}$.

故(*)式亦恒成立.

综上所述，若$a\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{e^2-1}}$，则对一切$n\in\mathbf{N}^*$，$x_n<|f(x_n)|$恒成立. ………………………… 10分