名校联考联合体2023年春季高二期末联考
暨新高三适应性联合考试

数学参考答案

一、二、选择题

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答　案	C	A	D	C	B	A	A	C	ABC	BCD	ACD	AB

1. C 【解析】$M=\{x\mid -x^2+x+6\geqslant 0\}=[-2,3]$，由 $N=\{x\mid y=\sqrt{\ln x-1}\}=[\mathrm{e},+\infty)$，

则 $M\cap N=[\mathrm{e},3]$，故选 C.

2. A 【解析】$z=1+\mathrm{i}$，$\bar{z}+xz+y=1-\mathrm{i}+x(1+\mathrm{i})+y=(1+x+y)+(x-1)\mathrm{i}$，

由 $\bar{z}+xz+y=0$，结合复数相等的充要条件为实部、虚部对应相等，

得 $\begin{cases}1+x+y=0,\\ x-1=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=1,\\ y=-2,\end{cases}$ 故选 A.

3. D 【解析】$\because |\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}|=2$，$\therefore(\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n})^2=4$，又 $|\boldsymbol{m}|=1$，$|\boldsymbol{n}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore(\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n})^2=\boldsymbol{m}^2+4\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}+4\boldsymbol{n}^2=1+2\sqrt{3}\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle+3=4$，解得 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=0$，故选 D.

4. C 【解析】因为 M,N 分别为 AA_1,CC_1 的中点，所以 $MA_1=NC_1=2$，所以三棱锥 $M-NB_1D_1$ 是正四面体，此正四面体的体积为 $\frac{8}{3}$，故选 C.

5. B 【解析】8 名同学坐在一行的所有排法共有 $\mathrm{A}_8^8=40320$ 种排法，

来自同一班级的 4 名学生互不相邻的排法可分为两类：

第一类：来自 A 班的 4 名学生坐在第 1、3、5、7 位置，共有 $\mathrm{A}_4^4\cdot\mathrm{A}_4^4=576$ 种排法；

第二类：来自 A 班的 4 名学生坐在第 2、4、6、8 位置，共有 $\mathrm{A}_4^4\cdot\mathrm{A}_4^4=576$ 种排法，

所以来自 A 班的 4 名学生互不相邻，且来自 B 班的 4 名学生也互不相邻的排法共有 $2\mathrm{A}_4^4\cdot\mathrm{A}_4^4=1152$ 种排法，

所以事件“来自 A 班的 4 名学生互不相邻，且来自 B 班的 4 名学生也互不相邻”的概率 $P=\frac{1152}{40320}=\frac{1}{35}$.

故选 B.

6. A 【解析】由已知条件可得 $f(x)$ 的最小正周期为 4，所以 $\omega=\frac{\pi}{2}$；由 $f(x+m)=mf(-x)$ 易知 $m=1$，继而得到函数 $f(x)$ 关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称，故 $\frac{\pi}{4}+\varphi=k\pi\Rightarrow\varphi=-\frac{\pi}{4}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\varphi=-\frac{\pi}{4}$，故选 A.

7. A 【解析】因为 $g(x)=xf(x)=x(2^x-2^{-x})$，该函数的定义域为 $\mathbf{R}$，

$g(-x)=x(2^x-2^{-x})=g(x)$，所以函数 $y=g(x)$ 为偶函数，故 $g\left(-\frac{3}{2}\right)=g\left(\frac{3}{2}\right)$，

当 $x>0$ 时，$f(x)=\frac{2^{2x}-1}{2^x}=2^x-2^{-x}>0$，

任取 $x_1>x_2>0$，$-x_1<-x_2$，则 $2^{x_1}>2^{x_2}$，$2^{-x_1}<2^{-x_2}$，所以 $2^{x_1}-2^{-x_1}>2^{x_2}-2^{-x_2}$，

所以 $f(x_1)>f(x_2)>0$，$x_1f(x_1)>x_2f(x_2)$，即 $g(x_1)>g(x_2)$，所以函数 $y=g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $0<0.5^{\frac{1}{3}}<0.5^0=1<\ln 3<\frac{3}{2}$，则 $g(0.5^{\frac{1}{3}})<g(\ln 3)<g\left(\frac{3}{2}\right)$，即 $b<a<c$，故选 A.

8. C 【解析】设球的球心为 O，因为球的表面积为 20π，所以球的半径 $R=\sqrt{5}$，又因为 $AB=2$，$BC=\sqrt{3}$，$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，所以 $\triangle ABC$ 为 $\mathrm{Rt}\triangle$，且 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，球心 O 到平面 ABC 的距离为 2. 又三棱锥 $A-BCD$ 的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 D 到平面 ABC 的距离 $d=3$. 故 D 在球面的截面圆 O_1 上，$O_1O=1$，截面圆 O_1 的半径为 2. 设 D 在平面 ABC 上的投影为 M，则 M 的轨迹为圆，圆心为 $\triangle ABC$ 的外心，即为 AB 的中点. 又 $CM\in[1,3]$，所以 $CD\in[\sqrt{10},3\sqrt{2}]$，故选 C.

9. ABC 【解析】因为对 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(-x)=-x^3+12x+t$，显然当 $t=0$ 时，$f(x)$ 为奇函数，即 A 正确；

因为 $f'(x)=3(x^2-4)=3(x+2)(x-2)$，则函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-2)$ 和 $(2,+\infty)$，函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[-2,2]$，故 B 正确；

由 $f'(x)=3(x^2-4)=3(x+2)(x-2)=0$ 得 $x=\pm2$，结合选项 B 可知，$x=-2$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点，

此时函数 $f(x)$ 的极大值为 $f(-2)=-8+24+t=17$，所以 $t=1$ 故 C 正确；

由 B 可知，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 和 $(2,+\infty)$ 上单调递增，函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 无最大值，无最小值，故 D 错误．故选 ABC.

10. BCD 【解析】因为抛物线 $C:y=2px^2\Rightarrow x^2=\frac{1}{2p}y$ 的焦点 F 到准线 l 的距离为 2，所以 $\frac{1}{4p}=2\Rightarrow p=\frac{1}{8}$，

从而抛物线 C 的方程是 $x^2=4y$，所以 A 错误；

设 M 到准线的距离为 d，则 $|MA|+|MF|=|MA|+d\geqslant3+1=4$，故 B 正确；

抛物线的焦点为 $F(0,1)$，直线 $y=kx+1$ 过焦点 F，所以直线 $y=kx+1$ 与抛物线 C 相交所得弦长最短为通径 $2p=4$，故 C 正确；

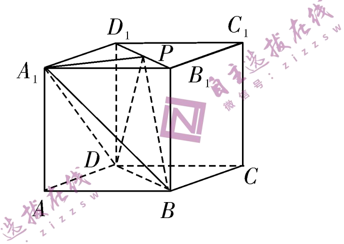
对于 D，不妨设 M 点在第一象限，过 M 点向准线作垂线，垂足为 Q，则 $|MF|=|MQ|$，连接 MN，在 $\mathrm{Rt}\triangle MQN$ 中，设 $\angle MNQ=\theta$，

则 $t=\frac{|MF|}{|MN|}=\frac{|MQ|}{|MN|}=\sin\theta$，要求 t 的最小值，即 $\sin\theta$ 最小，即 θ 最小，所以当直线 MN 与抛物线相切时，角 θ 最小，

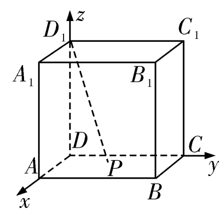
设切线方程为 $y=kx-1$，k 存在，且 $k>0$，由 $\begin{cases}y=kx-1,\\x^2=4y\end{cases}$ 联立得 $x^2-4kx+4=0$，

令 $\Delta=0$，得 $16k^2-16=0$，所以 $k=1$ 或 $k=-1$（舍），所以 $\theta=\frac{\pi}{4}$，所以 $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 D 正确.

11. ACD 【解析】对于 A，由题意可得：$BB_1/\!/DD_1$ 且 $BB_1=DD_1$，$\therefore BB_1D_1D$ 为平行四边形，则 $BD/\!/B_1D_1$，又 $B_1D_1\not\subset$ 平面 A_1BD，$BD\subset$ 平面 A_1BD，$\therefore B_1D_1/\!/$ 平面 A_1BD，又 $\because P$ 为线段 B_1D_1 上的点，则点 P 到平面 A_1BD 的距离为定值；



对于 B，以 D 为坐标原点，建如图所示的空间直角坐标系，



设 $P(x,y,0)$，$D_1(0,0,2)$，$A(2,0,0)$，$\overrightarrow{D_1P}=(x,y,-2)$，$\overrightarrow{AD_1}=(-2,0,2)$，若 $D_1P\perp AD_1$，则 $\overrightarrow{D_1P}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0$，即 $x=-2$ 与题意矛盾，所以 B 不正确；

对于 C，取 BC 的中点为 E，取 BB_1 的中点为 F，取 A_1B_1 的中点为 G，取 A_1D_1 的中点为 H，

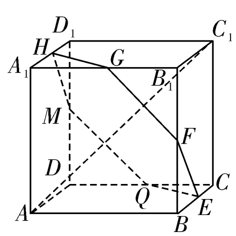
取 DD_1 的中点为 M，分别连接 QE,EF,FG,GH,HM,MQ，

由 $AC_1\perp QE$，$AC_1\perp EF$，且 $QE\cap EF=E$，所以 $AC_1\perp$ 平面 $EFGHMQ$，

由题意可得 P 的轨迹为正六边形 $EFGHMQ$，其中 $|QE|=|EF|=\sqrt{2}$，

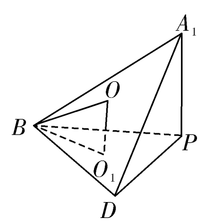
所以点 P 的轨迹的周长为 $6\sqrt{2}$，C 正确；

对于 D，当点 P 为 B_1D_1 中点时，则 $A_1P\perp B_1D_1$，$\because BB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，$A_1P\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，



$\therefore A_1P\perp BB_1$，又 $BB_1\cap B_1D_1=B_1$，BB_1，$B_1D_1\subset$ 平面 BB_1D_1D，$\therefore A_1P\perp$ 平面 BB_1D_1D，

设 $\triangle PBD$ 的外接圆圆心为 O_1，半径为 r，三棱锥 $P-A_1BD$ 的外接球的球心 O，半径为 R，连接 OO_1，O_1B，



OB，则 $OO_1\perp$ 平面 PBD，且 $OO_1=\frac{1}{2}A_1P=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

对于 $\triangle PBD$，$PB=PD=\sqrt{6}$，$BD=2\sqrt{2}$，

$\therefore\cos\angle BPD=\frac{PB^2+PD^2-BD^2}{2PB\cdot PD}=\frac{1}{3}$，则 $\sin\angle BPD=\sqrt{1-\cos^2\angle BPD}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

$\because 2r=\frac{BD}{\sin\angle BPD}=3$，则 $r=\frac{3}{2}$，$\therefore R^2=r^2+OO_1^2=\frac{11}{4}$，即 $R=\frac{\sqrt{11}}{2}$，D 正确.

12. AB 【解析】$f(x)=\sqrt{e^{2x}+x^2-4x-2e^x+5}+\sqrt{e^{2x}+x^2+2ex-2e^{x+1}+2e^2}=\sqrt{(x-2)^2+(e^x-1)^2}+\sqrt{(x+e)^2+(e^x-e)^2}$，

故 $f(x)$ 表示函数 $y=\mathrm{e}^x$ 上的点 $P(x,y)$ 与两点 $A(2,1)$，$B(-\mathrm{e},\mathrm{e})$ 的距离之和，所以当 P 为线段 AB 与函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的图象的交点时，$f(x)$ 的值最小，由 $\begin{cases} y=\mathrm{e}^x, \\ y=\dfrac{1-\mathrm{e}}{2+\mathrm{e}}x+\dfrac{3\mathrm{e}}{2+\mathrm{e}}, \end{cases}$ 可设 $g(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1-\mathrm{e}}{2+\mathrm{e}}x-\dfrac{3\mathrm{e}}{2+\mathrm{e}}$，

$g\left(\dfrac{1}{4}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}-\dfrac{1+11\mathrm{e}}{8+4\mathrm{e}}\approx\sqrt{1.65}-\dfrac{30.92}{18.88}<\sqrt{1.65}-1.5<0$，

$g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-\dfrac{1+5\mathrm{e}}{4+2\mathrm{e}}\approx1.65-\dfrac{14.6}{9.44}>1.65-\dfrac{14.7}{9}>1.65-1.64>0$，

所以 $\exists x_0\in\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$，使得 $g(x_0)=0$，

由题可得 $k=0$ 时，$x_0\in\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)\subseteq\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 成立，所以 A 正确；

$k=1$ 时，$x_0\in\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)\subseteq\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right)$ 成立，所以 B 正确；当 $k\geqslant2$ 时，$\dfrac{k}{4}\geqslant\dfrac{1}{2}$，不合题意.

故选 AB.

三、填空题

13. 16 **【解析】**因为 $(\sqrt{x}-1)^6$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^r(\sqrt{x})^{6-r}(-1)^r=C_6^r x^{\frac{6-r}{2}}(-1)^r$，

$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)(\sqrt{x}-1)^6$ 的展开式中常数项由两项构成，即 $1\times C_6^6(-1)^6=1$ 与 $\dfrac{1}{x}\times C_6^4(\sqrt{x})^2(-1)^4=15$，

所以 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)(\sqrt{x}-1)^6$ 的展开式中常数项为 $1+15=16$.

14. e **【解析】**设切点 $M(x_0,y_0)$，则由 $y=\ln x$，得 $y'=\dfrac{1}{x}$，由 $x^2=2py$，得 $y'=\dfrac{1}{p}x$，则 $\begin{cases} \dfrac{1}{x_0}=\dfrac{x_0}{p}, \\ y_0=\ln x_0, \\ x_0^2=2py_0, \end{cases}$

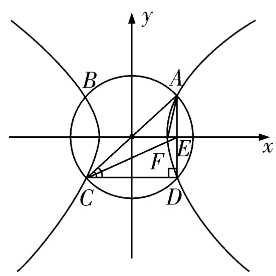
解得 $p=\mathrm{e}$.

15. $\dfrac{3}{4}$ **【解析】**由已知得 $a_{2000}+a_{2046}=6$，

又 $a_{2000}>0$，$a_{2046}>0$. $\therefore\dfrac{2}{a_{2000}}+\dfrac{1}{2a_{2046}}=\dfrac{1}{6}(a_{2000}+a_{2046})\left(\dfrac{2}{a_{2000}}+\dfrac{1}{2a_{2046}}\right)=\dfrac{1}{6}\left(2+\dfrac{1}{2}+\dfrac{2a_{2046}}{a_{2000}}+\dfrac{a_{2000}}{2a_{2046}}\right)\geqslant\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{2}+2\right)=\dfrac{3}{4}$，

当且仅当“$a_{2000}=2a_{2046}=4$”时取得等号.

16. $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ **【解析】**$\because k_{FA}\cdot k_{FC}=\dfrac{y_F-y_A}{x_F-x_A}\cdot\dfrac{y_F-y_C}{x_F-x_C}=\dfrac{y_F^2-y_A^2}{x_F^2-x_A^2}=\dfrac{\frac{b^2}{a^2}(x_F^2-x_A^2)}{x_F^2-x_A^2}=\dfrac{b^2}{a^2}$，



即 $k_2\cdot k_{CF}=\dfrac{b^2}{a^2}$，①

$\therefore$ 由 $\begin{cases} k_2\cdot k_{CF}=\dfrac{b^2}{a^2}, \\ k_1\cdot k_2=3 \end{cases}\Rightarrow\dfrac{k_{CF}}{k_1}=\dfrac{b^2}{3a^2}$，

连接 CD，可得 $\begin{cases} k_1=\tan\angle ACD=\dfrac{AD}{CD}, \\ k_{CE}=\tan\angle ECD=\dfrac{DE}{CD}, \end{cases}$ 可得 $k_1=2k_{CF}$，②

由①②联立 $3a^2=2b^2$，所以 $e=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

四、解答题

17. **【解析】**(1) 由已知可得 $a_{n+1}=\dfrac{2(n+1)}{n}a_n+\dfrac{n+2}{n}\Rightarrow a_{n+1}+1=\dfrac{2(n+1)}{n}a_n+\dfrac{2n+2}{n}$，

$\therefore\dfrac{a_{n+1}+1}{n+1}=\dfrac{2a_n}{n}+\dfrac{2}{n}=2\,\dfrac{a_n+1}{n}$.

所以 $\left\{\dfrac{a_n+1}{n}\right\}$ 是以 2 为首项，2 为公比的等比数列. ………………………………………………………… 5 分

(2) 由(1)可得 $\dfrac{a_n+1}{n}=2^n$，因此 $b_n=\log_2 2^n=n$，$\dfrac{1}{b_{2n}b_{2n+2}}=\dfrac{1}{4n(n+1)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$，

$S_n=\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{n}{4(n+1)}$. ……………………………………………… 10 分

18.【解析】(1)由题中表格给出的信息可知，函数 $f(x)$ 的周期 $T=\frac{11\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\pi\Rightarrow\omega=2$. …………………………………… 2 分

由 $2\sin\left(2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi\right)=2\Rightarrow\frac{5\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi\Rightarrow\varphi=-\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$；

又 $\varphi\in(-\pi,0)$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$， …………………………………… 4 分

$\therefore f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$. …………………………………… 5 分

(2)由 $f(A)=2\sin\left(2A-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$ 可知 $\sin\left(2A-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因为 $0<A<\frac{\pi}{2}$，所以 $-\frac{\pi}{3}<2A-\frac{\pi}{3}<\frac{2\pi}{3}$，所以 $2A-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$，则 $A=\frac{\pi}{3}$. …………………………………… 6 分

由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2$，即 $b=2\sin B, c=2\sin C$，

则 $bc=4\sin B\sin C=4\sin B\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)=4\sin B\left(\frac{1}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right)$

$=2\sqrt{3}\sin B\cos B+2\sin^2 B=\sqrt{3}\sin 2B+1-\cos 2B=2\sin\left(2B-\frac{\pi}{6}\right)+1$， …………………………………… 8 分

又因为在锐角三角形 $\triangle ABC$ 中，由 $\begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2},\\ 0<C<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2},\\ 0<\frac{2\pi}{3}-B<\frac{\pi}{2},\end{cases}$

得 $\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$， …………………………………… 9 分

所以 $\frac{\pi}{6}<2B-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，所以 $\frac{1}{2}<\sin\left(2B-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$，则 $1<2\sin\left(2B-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 2$，

故 bc 的取值范围为 $(2,3]$. …………………………………… 10 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$，

所以 $\triangle ABC$ 面积的取值范围为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$. …………………………………… 12 分

19.【解析】(1)当 $p=\frac{1}{2}$ 时，每台设备能正常工作的概率为：$C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)+C_3^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2}$，…………………… 2 分

所以一天内制冰厂不亏本的概率为 $1-\left(1-\frac{1}{2}\right)^3=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$. …………………………………… 4 分

(2)若不采取措施，设总损失为 X_0，当前每台设备能正常工作的概率为 0.6，

故 $E(X_0)=10000\times(1-0.6)^3=10000\times 0.064=640$ 元. …………………………………… 6 分

设方案 1、方案 2 的总损失分别为 X_1, X_2，

采用方案 1，更换 3 台设备的部分零件，使得每台设备能正常工作的概率为 0.85，

故 $E(X_1)=10000\times(1-0.85)^3+600=33.75+600=633.75$ 元. …………………………………… 8 分

采用方案 2，对设备进行维护，使得每台设备能正常工作的概率为 0.75，

故 $E(X_2)=10000\times(1-0.75)^3+a=156.25+a$ 元. …………………………………… 9 分

又 $E(X_1)-E(X_2)=633.75-156.25-a=477.5-a$，且 $640>633.75$， …………………………………… 10 分

因此，从期望损失最小的角度，当 $a=477.5$ 时，可以选择方案 1 或 2；当 $a<477.5$ 时，选择方案 2；当 $a>477.5$ 时，采取方案 1.

…………………………………… 12 分

20.【解析】(1)由题意可知：在下底面圆中，CD 为直径.

因为 $DE=DF$，

所以 G 为弦 EF 的中点，且 $EF\perp CD$.

因为 $EF\perp AD, AD\cap CD=D, AD, CD\subset$ 平面 $ABCD$.

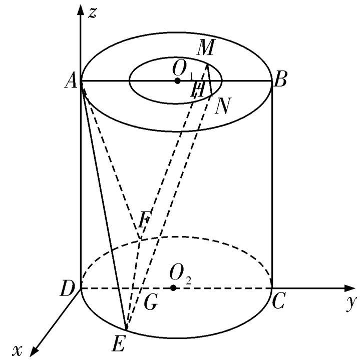
所以 $EF\perp$ 平面 $ABCD$. …………………………………… 2 分

又因为圆柱上、下底面相互平行，即平面 DEF // 平面 ABM，且 $EF\subset$ 平面 DEF，所以 EF // 平面 ABM.

平面 $AEF\cap$ 平面 $ABM=l$，$EF\subset$ 平面 AEF，所以 EF // l，又 $EF\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $l\perp$ 平面 $ABCD$. ………………………………………………………… 5 分

(2)如图,设平面 MEF 交圆柱上底面 ABM 于 MN,交 AB 于点 H.



则二面角 $M-EF-A$ 的大小就是二面角 $H-EF-A$ 的大小.

分别以下底面垂直于 DG 的直线、DG、DA 为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系如图所示.

因为 $DE=DF=2$,底面圆半径为 2,所以 $EG=FG=\sqrt{3}$,$DG=1$.

则 $A(0,0,3)$,$E(\sqrt{3},1,0)$,$F(-\sqrt{3},1,0)$,设 $H(0,m,3)$,$(1<m<3)$,

$\overrightarrow{AE}=(\sqrt{3},1,-3)$,$\overrightarrow{AF}=(-\sqrt{3},1,-3)$,$\overrightarrow{EH}(-\sqrt{3},m-1,3)$,$\overrightarrow{EF}=(-2\sqrt{3},0,0)$, …… 6 分

设平面 AEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,

由$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AF}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}\sqrt{3}x_1+y_1-3z_1=0,\\ -\sqrt{3}x_1+y_1-3z_1=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x_1=0,\\ y_1=3z_1,\end{cases}$

令 $z_1=1$,可得 $\boldsymbol{m}=(0,3,1)$. ………………………………………………………… 8 分

设平面 HEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$,

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EH}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}-2\sqrt{3}x_2=0,\\ -\sqrt{3}x_2+(m-1)y_2+3z_2=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x_2=0,\\ (m-1)y_2+3z_2=0,\end{cases}$

令 $y_2=-3$,可得 $\boldsymbol{n}=(0,-3,m-1)$. ………………………………………………………… 9 分

又因为二面角 $M-EF-A$ 的正切值为$\dfrac{3}{4}$,

所以$|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|m-10|}{\sqrt{10}\sqrt{9+(m-1)^2}}=\dfrac{4}{5}$,

化简得 $3m^2+4m-20=0$,

解得 $m=2$ 或 $m=-\dfrac{10}{3}$(舍). ………………………………………………………… 11 分

即 $AH=2$. 又因为 $EF/\!/$平面 MAB,$EF\subset$平面 MEF,平面 $MAB\cap$平面 $MEF=MN$,

所以 $EF/\!/MN$,$MN\perp AB$,且 H 为 MN 的中点.

所以 $MH=1$,$AM=\sqrt{5}$,$DM=\sqrt{14}$,

所以若二面角 $P-EF-A$ 的正切值为$\dfrac{3}{4}$,则 DM 的长为 $\sqrt{14}$. ………………………………………………………… 12 分

21.**【解析】**(1)把 $x=0$ 代入可得切点为$(0,0)$,

$\because g'(x)=\dfrac{m(1-x)}{e^x}+\cos x$, ………………………………………………………… 1 分

$k=g'(0)=m+1=2$,$\therefore m=1$, ………………………………………………………… 2 分

所以切线方程为 $y=2x$. ………………………………………………………… 3 分

(2)由(1)知 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$,$f'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$,得 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$在$(-\infty,1)$单调递增,在$(1,+\infty)$单调递减,

故 $f(x)_{\max}=f(1)=\dfrac{1}{e}$,且 $x\in(-\infty,0)$时,$f(x)<0$,$x\in(0,1)$时,$0<f(x)<\dfrac{1}{e}$,$x\in(1,+\infty)$时,$0<f(x)<\dfrac{1}{e}$,

所以 $0<a<\dfrac{1}{e}$, ………………………………………………………… 5 分

过$(0,0)$和$\left(1,\dfrac{1}{e}\right)$作直线 $y=\dfrac{1}{e}x$,可知 $x\in(0,1)$时,易得$\dfrac{x}{e^x}>\dfrac{x}{e}$恒成立, ………………………………………………………… 7 分

过$(2,0)$和$\left(1,\dfrac{1}{e}\right)$作直线 $y=-\dfrac{1}{e}(x-2)$,下面证明:$x\in(1,+\infty)$时,$\dfrac{x}{e^x}>-\dfrac{1}{e}(x-2)$恒成立,

要证:$\dfrac{x}{e^x}>-\dfrac{1}{e}(x-2)$,只需要证:$e^{x-1}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)>-1$,

令 $\varphi(x)=e^{x-1}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)$,$\varphi'(x)=e^{x-1}\left(\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{2}{x}+1\right)=e^{x-1}\dfrac{(x-1)^2+1}{x^2}>0$,

所以 $\varphi(x)=e^{x-1}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)$在 $x\in(1,+\infty)$上单调递增,因而 $\varphi(x)>\varphi(1)=-1$ 成立. ………………………………………………………… 10 分

令 $y=a$ 与 $y=\dfrac{1}{e}x$ 和 $y=-\dfrac{1}{e}(x-2)$分别交于 $M(x_1',y_1')$,$N(x_2',y_2')$,

故由$\dfrac{x_1'}{e}=a\Rightarrow x_1<x_1'=ae$,由$-\dfrac{1}{e}(x_2'-2)=a\Rightarrow x_2>x_2'=2-ae$,

所以 $x_2-x_1>x_2'-x_1'=2-2ae$，

所以 $x_2-x_1>2-2ae$. ………………………………………………………………………… 12 分

22.【解析】(1)由题意得 $F_1(-\sqrt{2},0)$，$F_2(\sqrt{2},0)$，

因为 D 为 F_1C 中点，且 $DP\perp BC$，所以 PD 是线段 F_1C 的垂直平分线，

所以 $|PF_1|=|PC|$，………………………………………………………………………… 1 分

所以 $|PF_1|+|PF_2|=|PC|+|PF_2|=R=4\sqrt{2}>|F_1F_2|$，

所以点 P 的轨迹即曲线 Γ 是以 F_1，F_2 为焦点的椭圆，……………………………… 2 分

设曲线 Γ：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，其中 $a>b>0$，$a^2-b^2=c^2$.

则 $2a=4\sqrt{2}$，$a=2\sqrt{2}$，$c=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{6}$. ……………………………… 3 分

故曲线 Γ：$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{6}=1$. ……………………………………………………………… 4 分

(2)△QEF 的面积是定值，理由如下：

由题意易得 $E(0,\sqrt{2})$，$F(0,-\sqrt{2})$，$A_1(-2\sqrt{2},0)$，$A_2(2\sqrt{2},0)$，且直线 l_2 的斜率不为 0，…… 5 分

可设直线 l_2：$x=my+\sqrt{2}$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{6}=1,\\ x=my+\sqrt{2},\end{cases}$ 得 $(3m^2+4)y^2+6\sqrt{2}my-18=0$，

所以 $\begin{cases}y_1+y_2=-\dfrac{6\sqrt{2}m}{3m^2+4},\\ y_1y_2=-\dfrac{18}{3m^2+4},\end{cases}\Rightarrow my_1y_2=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}(y_1+y_2)$. ……………………………… 6 分

直线 A_1M 的方程为：$y=\dfrac{y_1}{x_1+2\sqrt{2}}(x+2\sqrt{2})$，直线 A_2N 的方程为：$y=\dfrac{y_2}{x_2-2\sqrt{2}}(x-2\sqrt{2})$，

由 $\begin{cases}y=\dfrac{y_1}{x_1+2\sqrt{2}}(x+2\sqrt{2}),\\ y=\dfrac{y_2}{x_2-2\sqrt{2}}(x-2\sqrt{2}),\end{cases}$ 得 $\dfrac{x+2\sqrt{2}}{x-2\sqrt{2}}=\dfrac{(x_1+2\sqrt{2})y_2}{(x_2-2\sqrt{2})y_1}$. ……………………………… 7 分

又 $\dfrac{x+2\sqrt{2}}{x-2\sqrt{2}}=\dfrac{(x_1+2\sqrt{2})y_2}{(x_2-2\sqrt{2})y_1}=\dfrac{(my_1+3\sqrt{2})y_2}{(my_2-\sqrt{2})y_1}=\dfrac{my_1y_2+3\sqrt{2}y_2}{my_1y_2-\sqrt{2}y_1}$

$=\dfrac{\frac{3\sqrt{2}}{2}(y_1+y_2)+3\sqrt{2}y_2}{\frac{3\sqrt{2}}{2}(y_1+y_2)-\sqrt{2}y_1}=\dfrac{\frac{3\sqrt{2}}{2}y_1+\frac{9\sqrt{2}}{2}y_2}{\frac{\sqrt{2}}{2}y_1+\frac{3\sqrt{2}}{2}y_2}=3$，……………………………… 9 分

解得 $x=4\sqrt{2}$. …………………………………………………………………………… 10 分

故点 Q 在直线 $x=4\sqrt{2}$ 上，所以 Q 到 EF 的距离 $d=4\sqrt{2}$，

因此△QEF 的面积是定值，为 $\dfrac{1}{2}|EF|\cdot d=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times4\sqrt{2}=8$. ……………………………… 12 分