

2023年甘肃省第二次高考诊断考试

理科数学

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号框涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号框,回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 $\frac{z}{1-2i} = i$, i 为虚数单位, 则 $z =$

- A. $-2+i$ B. $2-i$ C. $2+i$ D. $-2-i$

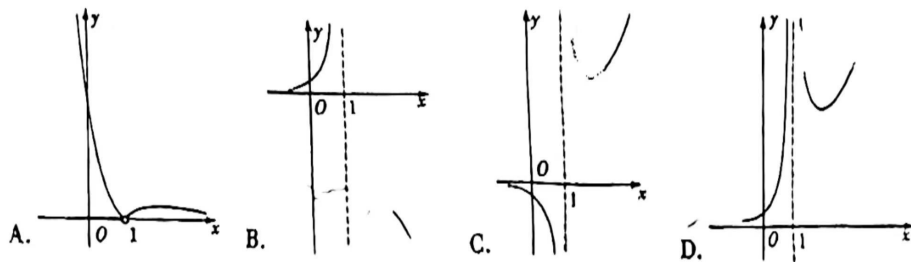
2. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 4x \leq 0, x \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x | -1 \leq x < 4\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $[-1, 4]$ B. $[0, 4)$ C. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ D. $\{0, 1, 2, 3\}$

3. 命题 p : 已知一条直线 a 及两个不同的平面 α, β , 若 $a \subset \alpha$, 则“ $a \perp \beta$ ”是“ $\alpha \perp \beta$ ”的充分条件; 命题 q : 有两个面相互平行, 其余各面均为梯形的多面体是棱台。则下列为真命题的是

- A. $(\neg p) \vee q$ B. $p \wedge (\neg q)$ C. $p \wedge q$ D. $\neg(p \vee q)$

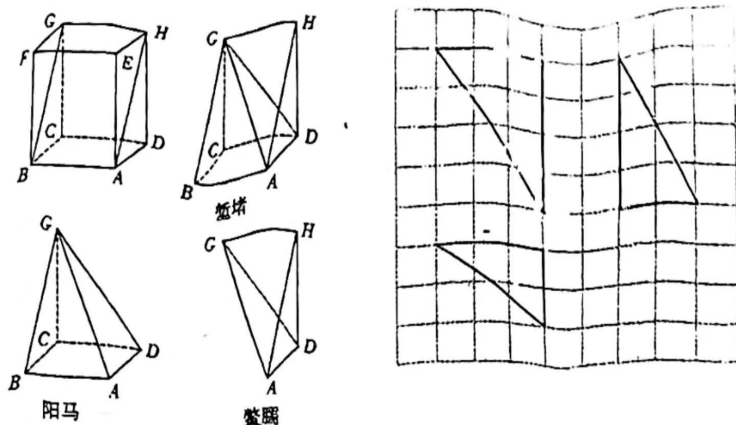
4. 函数 $y = \frac{3^x}{|3-3^x|}$ 的图象大致是



5. 已知椭圆的方程为 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} = 1 (m > 0, n > 0)$, 离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则下列选项中不满足条件的为

- A. $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ B. $\frac{y^2}{4} + x^2 = 1$ C. $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ D. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$

6. 刘徽的《九章算术注》中有这样的记载:“邪解立方有两甄堵, 邪解甄堵, 其一为阳马, 一为鳖臑, 阳马居二, 鳖臑居一, 不易之率也。”意思是说: 把一块长方体沿斜线分成相同的两块, 这两块叫做甄堵, 再把一块甄堵沿斜线分成两块, 大的叫阳马, 小的叫鳖臑, 两者体积比为 2:1, 这个比率是不变的。如图所示的三视图是一个鳖臑的三视图, 则其分割前的长方体的体积为



- A. 2 B. 4 C. 12 D. 24

n 位校验码是一种由 n 个“0”或“1”构成的数字传输单元,分为奇校验码和偶校验码,若一个校验码中有奇数个1,则称其为奇校验码,如5位校验码“01101”中有3个1,该校验码为奇校验码.那么6位校验码中的奇校验码的个数是

- A. 6 B. 32 C. 64 D. 846

若 $\frac{\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha)}{\cos(\frac{\pi}{4} + \alpha)} = \frac{1}{2}$, 则 $\tan \alpha =$

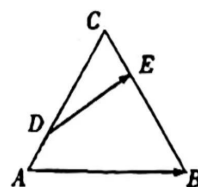
- A. $\frac{1}{3}$ B. 3 C. $-\frac{1}{3}$ D. -3

2022年8月,中科院院士陈发虎带领他的团队开始了第二次青藏高原综合科学考察.在科考期间,陈院士为同行的科研人员讲解专业知识,在空气稀薄的高原上开设了“院士课堂”.已知某地大气压强与海平面大气压强之比为 b , b 与该地海拔高度 h (单位:米)满足关系: $b = e^{-kh}$ (k 为常数, e 为自然对数的底).若科考队算得A地 $b \approx \frac{1}{2}$,海拔8700米的B地 $b \approx \frac{1}{3}$,则A,B两地的高度差约为($\ln 3 \approx 1.1, \ln 2 \approx 0.7$)

- A. 3164米 B. 4350米 C. 5536米 D. 6722米

如图所示,边长为2的正三角形 ABC 中,若 $\vec{BD} = \vec{BA} + \lambda \vec{AC} (\lambda \in [0,1])$, $\vec{AE} = \vec{AC} + \lambda \vec{CB} (\lambda \in [0,1])$,则关于 $\vec{DE} \cdot \vec{AB}$ 的说法正确的是

- A. 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, $\vec{DE} \cdot \vec{AB}$ 取到最大值
B. 当 $\lambda = 0$ 或 1 时, $\vec{DE} \cdot \vec{AB}$ 取到最小值
C. $\exists \lambda \in [0,1]$, 使得 $\vec{DE} \cdot \vec{AB} = 0$
D. $\forall \lambda \in [0,1]$, $\vec{DE} \cdot \vec{AB}$ 为定值



已知 A_1, A_2 是双曲线 $x^2 - y^2 = 2$ 的左、右顶点, P 为双曲线上除 A_1, A_2 以外的任意一点.若坐标原点 O 到直线 PA_1, PA_2 的距离分别为 d_1, d_2 , 则 $d_1 \cdot d_2$ 的取值范围

- A. $(0,1)$ B. $(0,1]$ C. $(0, \sqrt{2})$ D. $(0, \sqrt{2}]$

若 $a = \cos \frac{2\pi}{7}$, 则以下不等式成立的是

- A. $2^{a-\frac{1}{2}} < 2a$ B. $\sqrt{2}a < 2^{a-1}$ C. $2^{a-1} < a$ D. $2^{a-\frac{1}{2}} < (\sqrt{2})^{\sqrt{a}}$

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 为庆祝中国共产党第二十次代表大会胜利闭幕,某高中学校在学生中开展了“学精神,悟思想,谈收获”的二十大精神宣讲主题活动.为了解该校学生参加主题学习活动的具体情况,校团委利用分层抽样的方法从三个年级中抽取了260人进行问卷调查,其中高一、高二年级各抽取了85人.已知该校高三年级共有720名学生,则该校共有学生_____人.
14. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 4$, 直线 $l: y = x + b$, 在区间 $[-5, 5]$ 上任取一个数 b , 则圆 O 与直线 l 有公共点的概率为_____.
15. 我国古代数学名著《孙子算经》卷下的第26题是:“今有物不知其数,三三数之剩二,五五数之剩三,七七数之剩二,问物几何?”此题所表达的数学涵义是:一个正整数,被3除余2,被5除余3,被7除余2,这个正整数是多少?这就是举世闻名的“中国剩余定理”.若分别将所有被3除余2的正整数和所有被7除余2的正整数按从小到大的顺序组成数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 并依次取出数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的公共项组成数列 $\{c_n\}$, 则 $c_n =$ _____; 若数列 $\{d_n\}$ 满足 $d_n = c_n - 20n + 20$, 数列 $\left\{ \frac{1}{d_n d_{n+1}} \right\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 $S_{2023} =$ _____.
16. 已知函数 $y = f(x)$ 满足:当 $-2 \leq x \leq 2$ 时, $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 1$, 且 $f(x) = f(x+4)$ 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 都成立, 则方程 $16f(x) = 4|x| + 1$ 的实根个数是_____.

三、解答题:共70分.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.第17~21题为必考题,每个试题考生都必须作答.第22,23题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共60分.

17. (本小题满分12分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\sin B = \frac{1}{3}$, 且_____.

(1)求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2)若 $\sin A \sin C = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 求 b .

在① $a^2 - b^2 + c^2 = 2$, ② $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = -1$ 这两个条件中任选一个,补充在横线中,并解答.

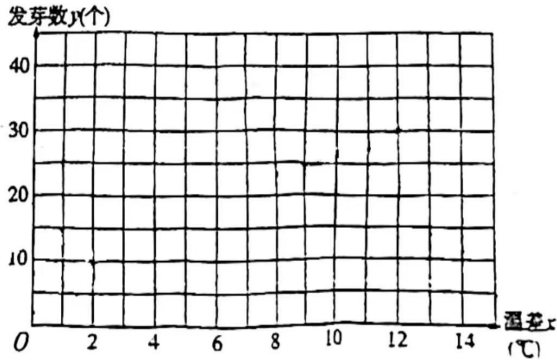
注:如果选择多个条件分别解答,按第一个解答计分.

18. (本小题满分12分)

某省农科院为支持省政府改善民生,保证冬季蔬菜的市场供应举措,深入开展了反季节蔬菜的相关研究,其中一项是冬季大棚内的昼夜温差 x ($^{\circ}\text{C}$) 与反季节蔬菜种子发芽数 y (个)之间的关系,经过一段时间观测,获得了下列一组数据(y 值为观察值):

温差 x ($^{\circ}\text{C}$)	8	9	10	11	12
发芽数 y (个)	23	24	26	27	30

- (1)在所给坐标系中,根据表中数据绘制散点图,并判断 y 与 x 是否具有明显的线性相关关系(不需要说明理由);
- (2)用直线 l 的方程来拟合这组数据的相关关系,若直线 l 过散点图中的中间点(即点 $(10, 26)$), 且使发芽数的每一个观察值与直线 l 上对应点的纵坐标的差的平方之和最小,求出直线 l 的方程;
- (3)用(2)中求出的直线方程预测当温度差为 15°C 时,蔬菜种子发芽的个数.

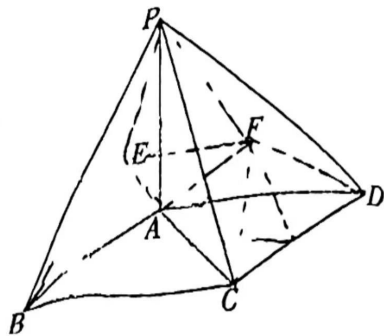


19. (本小题满分 12 分)

已知四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, $PA \perp$ 底面 $ABCD$. 若 $\angle ABC = \frac{\pi}{4}$, $PA = AB = 2$, E, F 分别为 $\triangle PAB, \triangle PCD$ 的重心.

(1) 求证: $EF \parallel$ 平面 PBC ;

(2) 当 $PD \perp AC$ 时, 求平面 PEF 与平面 PAD 所成角的正切值.



20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长轴长为 4, A, B 是其左、右顶点, M 是椭圆上异于 A, B 的动点, 且 $k_{MA} \cdot k_{MB} = -\frac{3}{4}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若 P 为直线 $x = 4$ 上一点, PA, PB 分别与椭圆交于 C, D 两点.

① 证明: 直线 CD 过椭圆右焦点 F_2 ;

② 椭圆的左焦点为 F_1 , 求 $\triangle CF_1D$ 的内切圆的最大面积.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} + a \ln x (a \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $a = 4$ 时, 求 $f(x)$ 的零点个数;

(2) 若 $f(x+1) + e^x - \frac{1}{x+1} \geq 1$ 恒成立, 求实数 a 的值.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22, 23 题中选定一题作答, 并用 2B 铅笔在答题卡上将所选题目对应的题号方框涂黑. 按所涂题号进行评分, 不涂, 多涂均按所答第一题评分; 多答按所答第一题评分.

22. (本小题满分 10 分) [选修 4-4: 坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系中 xOy , 曲线 C_1 的参数方程为: $\begin{cases} x = -2 + 2\cos\alpha \\ y = 2\sin\alpha \end{cases} (\alpha \text{ 为参数, 且 } \alpha \in [0, \pi])$,

P 为曲线 C_1 上任意一点, 若将点 P 绕坐标原点顺时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得到点 Q , 点 Q 的轨迹为曲线 C_2 .

(1) 以原点 O 为极点, x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系, 求曲线 C_2 的极坐标方程,

(2) 已知点 $F(0, -1)$, 直线 $\sqrt{3}x - y - 1 = 0$ 与曲线 C_2 交于 A, B 两点, 求 $|FA| + |FB|$ 的值.

23. (本小题满分 10 分) [选修 4-5: 不等式选讲]

已知 $f(x) = |x+1| + |1-2x|$

(1) 求不等式 $f(x) \leq 3$ 的解集;

(2) 若 $0 < b < \frac{1}{2} < a$, 且 $f(a) = 3f(b)$, $a^2 + b^2 > m (m \in \mathbf{Z})$ 恒成立, 求 m 的最大值.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

