重庆市高2024届高三第一次质量检测

数学试题参考答案与评分细则

一、单项选择题:本题共8小题.每小题5分,共40分.

1－4 DBDB　　5－8 CBAB

3. D 【解析】$a=\log_{0.2}0.3\in(\log_{0.2}1,\log_{0.2}0.2)=(0,1)$,$b=\log_2 0.3<\log_2 1=0$

$c=2^{0.3}>2^0=1$,故 $c>a>b$

4. B 【解析】由题:$kx^2-3x+k\geqslant 0$ 恒成立,易知 $k=0$ 时不满足,

$k\neq 0$ 时,有 $\begin{cases}k>0\\ \Delta=9-4k^2\leqslant 0\end{cases}\Rightarrow k\geqslant\dfrac{3}{2}$

5. C 【解析】记 M="两动车相邻",N="动车01停在A道",则

$P(N|M)=\dfrac{n(MN)}{n(M)}=\dfrac{A_3^3}{A_2^2A_4^4}=\dfrac{1}{8}$

6. B 【解析】由题知 $\dfrac{1+x}{1-x}>0\Rightarrow -1<x<1$,易知 $f(-x)+f(x)=0\Rightarrow f(x)$ 为奇函数

又 $y=\log_2\dfrac{1+x}{1-x}=\log_2\left(\dfrac{2}{1-x}-1\right)$ 和 $y=\sin x$ 在 $(-1,1)$ 递增,故由

$f(x)+f(2x+1)<0\Rightarrow f(x)<-f(2x+1)=f(-2x-1)\Rightarrow -1<x<-2x-1<1\Rightarrow -1<x<-\dfrac{1}{3}$

7. A 【解析】由图可知当且仅当 $0<m<1$ 时,方程 $f(x)=m$ 有四个不同的根,且 $x_1+x_2=2\times\left(-\dfrac{5}{2}\right)=$

-5,由题:$2-e^{x_3}=m\Rightarrow x_3=\ln(2-m)$,$e^{x_4}-2=m\Rightarrow x_4=\ln(m+2)$,

$\therefore 2e^{x_3}-x_1x_4-x_2x_4=2(2-m)+5\ln(m+2)=-2m+5\ln(m+2)+4$

设 $h(m)=-2m+5\ln(m+2)+4(0<m<1)$,则

$h'(m)=\dfrac{1-2m}{m+2}$,令 $h'(m)<0\Rightarrow\dfrac{1}{2}<m<1$,$h'(m)>0\Rightarrow 0<m<\dfrac{1}{2}$

故 $h(m)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 递增,在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 递减,$\Rightarrow h(m)_{\max}=h\left(\dfrac{1}{2}\right)=5\ln\dfrac{5}{2}+3$

8. B 【解析】由图像可知,$a<0$ 不成立,则 $a\geqslant 0$,要 ab 最大,需要 $a>0$,$b>0$;

$b>1$ 时,$x=0$ 时不成立,则 $0<b\leqslant 1$;

对于取定的 b,要 ab 最大需要 a 更大,所以只需过 $(0,b)$ 作 $y=e^x$ 的切线,切线斜率即为最大的 a.

设切点 (t,e^t),则 $\dfrac{e^t-b}{t-0}=e^t$ 即 $a=e^t$,$b=(1-t)e^t$

$ab=(1-t)e^{2t}=g(t)$,$g'(t)=(1-t)\cdot 2e^{2t}+(-1)e^{2t}=(1-2t)e^{2t}$

所以在 $t=\dfrac{1}{2}$ 取得最大值 $\dfrac{e}{2}$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错得 0 分.

9. ABD　10. BC　11. AC　12. ABD

9. ABD 【解析】由于 $f(x)+f(2-x)=4$，得到 $f(x)$ 关于 $(1,2)$ 对称，又因为定义域为 R，所以 $f(1)=2$，B 正确；

因为是偶函数 $f(x-2)=f(2-x)=4-f(x)$，

$f(x-4)=4-f(x-2)=4-[4-f(x)]=f(x)$，所以周期为 4，A 正确；

由于周期性和奇偶性，$f(2023)=f(-1)=f(1)=2$，C 错误；

由于周期为 4，$f(x)$ 在 $(3,4)$ 的单调性与 $(-1,0)$ 的单调性相同，由于偶函数，在 $(-1,0)$ 的单调性与 $(0,1)$ 的单调性相反，所以 D 正确.

10. BC 【解析】$\overline{y'}=\dfrac{y_1+1+y_2+1+y_3+1+\cdots y_n+1}{n}=\dfrac{y_1+y_2+y_3+\cdots y_n}{n}+1=\bar{y}+1$，A 错误；

$\hat{b}$ 的计算中，x_i 数据不变，$y_i-\bar{y}=(y_i+1)-\overline{y'}$ 也不变，所以 $\hat{b}$ 不变，B 正确；

$\hat{a}'=\overline{y'}-\hat{b}\bar{x}=\bar{y}+1-\hat{b}\bar{x}=\hat{a}+1>\hat{a}$，C 正确；

由于 $R^2=1-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}$，$y_i$ 变成了 y_i+1，$\overline{y'}=\bar{y}+1$，$\hat{y}_i'=\hat{b}'x_i+\hat{a}'=\hat{b}x_i+\hat{a}+1=y_i+1$，从而

$y_i-\hat{y}_i$，$y_i-\bar{y}$ 都不变，所以 $R^2=R'^2$，D 错误.

11. AC 【解析】由 $\vec{AM}=3\vec{MF_1}=\dfrac{9}{4}\vec{F_1B}$ 可得：$\vec{AF_1}=3\vec{F_1B}\Rightarrow S_{\triangle AF_1F_2}=3S_{\triangle BF_1F_2}$，故 A 正确

设 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，$l:x=ty-c$，由椭圆离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 可得：$a=\sqrt{2}c$，$b=c$，

故椭圆方程可化为：$x^2+2y^2=2c^2$，联立直线 l 方程整理得：$(t^2+2)y^2-2tcy-c^2=0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则有：$y_1+y_2=\dfrac{2tc}{t^2+2}$，$y_1y_2=\dfrac{-c^2}{t^2+2}$，又由 $\overrightarrow{AF_1}=3\overrightarrow{F_1B}$ 可得：$y_1=-3y_2$，

联立可解得：$t^2=1\Rightarrow k^2=\dfrac{1}{t^2}=1\Rightarrow k=1$，故 B 错误

由 $k=1\Rightarrow\angle AF_1F_2=45^\circ$，又 $OA=OF_1\Rightarrow A$ 为上顶点，$AF_2=a=\sqrt{2}c$，

$AB=\sqrt{2}c+\dfrac{\sqrt{2}}{3}c=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}c$，$BF_2=4a-AF_2-AB=\dfrac{5\sqrt{2}}{3}c$，

易知满足 $2|AB|=|AF_2|+|BF_2|$，故 C 正确

对于 D：由前面的分析知：$\triangle AMF_2$ 是以 A 为直角的直角三角形，故内切圆半径 $r=$

$\dfrac{AM+AF_2-MF_2}{2}=\dfrac{\frac{3}{4}\sqrt{2}c+\sqrt{2}c-\frac{5\sqrt{2}c}{4}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}c=\dfrac{1}{4}a$，故 D 错误

12. ABD 【解析】由题方程 $f'(x)=ae^x-be^{-x}+c=\dfrac{ae^{2x}+ce^x-b}{e^x}=0\Leftrightarrow ae^{2x}+ce^x-b=0$ 有两不等实根 x_1,x_2，且 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$，$(x_2,+\infty)$ 上单调递增，在 (x_1,x_2) 单调递减，故 $a>0$. A 正确

令 $t=e^x, t>0$，则方程 $at^2+ct-b=0$ 有两个不等正实根 t_1,t_2，其中 $t_1=e^{x_1}, t_2=e^{x_2}$，从而有：

$$\begin{cases}\Delta=c^2+4ab>0, \because a+b<0 \Rightarrow b<-a<0 \\ \Rightarrow 0<c^2-4a^2=(c+2a)(c-2a) \Rightarrow c+2a<0(\because c-2a<0) \\ t_1+t_2=-\dfrac{c}{a}>0 \Rightarrow c<0(\because a>0) \\ t_1 \cdot t_2=\dfrac{-b}{a}>0 \Rightarrow b<0, \text{又} \because a+b<0, \text{故 } t_1 \cdot t_2=e^{x_1+x_2}=\dfrac{-b}{a}>1 \Rightarrow x_1+x_2>0\end{cases}$$

故 B 正确，C 错误

对于 D：$f(x_1)+f(x_2)=a(e^{x_1}+e^{x_2})+b(e^{-x_1}+e^{-x_2})+c(x_1+x_2)=a(t_1+t_1)+b\left(\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_2}\right)+$

$c(x_1+x_2)=a\cdot\left(-\dfrac{c}{a}\right)+b\cdot\left(\dfrac{c}{b}\right)+c(x_1+x_2)=c(x_1+x_2)<0$，D 正确

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\dfrac{1}{2}$　　14. $3+2\sqrt{2}$　　15. 5.5，2035　　16. $\left(-\infty,-\dfrac{2\sqrt{26}}{13}\right]\cup\left[\dfrac{2\sqrt{26}}{13},+\infty\right)$

13. $\dfrac{1}{2}$

【解析】X 服从二项分布 $B(n,p)$，则 $E(X)=np, D(X)=np(1-p)$

所以 $np=2np(1-p), p=\dfrac{1}{2}$

14. $3+2\sqrt{2}$

【解析】若 $\log_2(a-1)=\log_2(b-1)$，则 $a=b$ 不成立；

若 $\log_2(a-1)=-\log_2(b-1)=\log_2\dfrac{1}{b-1}$，则 $(a-1)(b-1)=1, ab=a+b, \Rightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1$

所以 $2a+b=(2a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=2+1+\dfrac{b}{a}+\dfrac{2a}{b}\geqslant 3+2\sqrt{2}, b=\sqrt{2}a$ 时取得

15. 5.5　　2035

【解析】设 2023 年为第一年，第 n 年该厂的金属产量为 a_n，截止第 n 年末这家冶金厂该金属的累计总产量为 S_n，$S_n=\begin{cases}S_{n-1}+a_n(n\geqslant 2) \\ 20+a_1(n=1)\end{cases}$

$a_1=20\times 10\%+3=5, a_2=(20+5)\times 10\%+3=5.5$，故 2024 年产量为 5.5 万吨，

$a_{n+1}=S_n\cdot 0.1+3, a_n=S_{n-1}\cdot 0.1+3$

作差得 $a_{n+1}-a_n=a_n\cdot 0.1(n\geqslant 2)$，所以 $a_{n+1}=a_n\cdot 1.1(n\geqslant 2)$，

$a_2=a_1\cdot 1.1$ 也成立，所以 $a_n=5\cdot 1.1^{n-1}$，

由 $a_n=5\cdot 1.1^{n-1}>15$ 得 $1.1^{n-1}>3, (n-1)\lg 1.1>\lg 3$

$(n-1)>\dfrac{\lg 3}{\lg 1.1}\approx\dfrac{0.4771}{0.0414}\approx 11.5$，则 n 取 13，为 2035 年

16. $\left(-\infty,-\frac{2\sqrt{26}}{13}\right]\cup\left[\frac{2\sqrt{26}}{13},+\infty\right)$

【解析】设 AB 中点为 $Q(x_0,y_0)$，$|PQ|=\frac{1}{2}|AB|$ 即 $PA\perp PB$，P 在 AB 为直径的圆上. 所以只需该圆与 AB 为直径的圆有公共点即可.

设直线 $AB:y=k(x-2)$，联立得 $k^2(x-2)^2=8x$

解得 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2k^2+4}{k^2}$，$y_0=\frac{4}{k}$，$r=\frac{1}{2}|AB|=x_0+2$

所以圆心距 $d=\sqrt{(x_0+4)^2+y_0^2}$，$d\leqslant r+3$ 即可（不可能内含）

则 $\sqrt{(x_0+4)^2+y_0^2}\leqslant x_0+5$ 化简得 $y_0^2\leqslant 2x_0+9$，

代入得 $\frac{16}{k^2}\leqslant 2\left(2+\frac{4}{k^2}\right)+9$，$k^2\geqslant\frac{8}{13}\Rightarrow k\in\left(-\infty,-\frac{2\sqrt{26}}{13}\right]\cup\left[\frac{2\sqrt{26}}{13},+\infty\right)$

17. 解：(1) 由题意可得 $\begin{cases}2a_1+12=8b_1+2\\2a_1+6=6b_1\end{cases}$，解得 $a_1=3$，$b_1=2$，

因为数列 $\{a_n\}$ 的公差为 3，数列 $\{b_n\}$ 的公比为 2，所以 $a_n=3n$，$b_n=2^n$ ………………………… 4 分

(2) 由 (1) 知：$\frac{1}{a_n\cdot\log_2 b_{n+1}}=\frac{1}{3n(n+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$\therefore S_n=\frac{1}{3}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$ ………………………… 8 分

易知 $y=1-\frac{1}{n+1}$ 在 $n\in\mathbf{N}^*$ 单调递增，故 $n=1$，S_n 取最小值 $\frac{1}{6}$，$n\to+\infty$，$S_n\to\frac{1}{3}$

故 $\frac{1}{6}\leqslant S_n<\frac{1}{3}$ 成立. ………………………………………………………………… 10 分

18. 解：(1) 证明：取 AC 的中点 N，连结 MN，BN

因为 $BA=BC$，所以 $BN\perp CA$.

因为 $FA\perp$ 面 ABC，$BN\subset$ 面 ABC，所以 $FA\perp BN$.

又因为 $CA\cap FA=A$，所以 $BN\perp$ 平面 CAF.

因为点 M 是 FC 的中点，所以 $MN/\!/FA/\!/EB$，且 $MN=\frac{FA}{2}=EB$.

所以四边形 $MNBE$ 为平行四边形，所以 $EM/\!/BN$，所以 $EM\perp$ 面 CAF，又 $EM\subset$ 平面 CEF，

从而平面 $CEF\perp$ 平面 CAF. ………………………………………………………… 5 分

(2) 设点 O，D 分别为 AB，EF 的中点，连结 OD，则 $OD/\!/FA$，

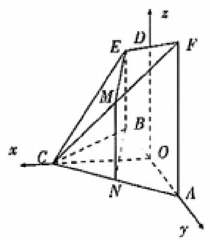
因为 $FA\perp$ 面 ABC，$OC\subset$ 面 ABC，所以 $OD\perp AB$.

因为 $ME=\sqrt{3}$，由 (1) 知 $BN=\sqrt{3}$，又因为 $BC=BA=2$

所以 $AC=2$，所以 $\triangle ABC$ 为正三角形，所以 $OC\perp AB$，

因为 $FA\perp$ 面 ABC，所以 $OC\perp$ 面 $ABEF$.

故 OC，OA，OD 两两垂直，以点 O 为原点，分别以 $\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OD}$ 的方向为 x，y，z 轴的正方向，建立空间直角坐标系 $O-xyz$.



$C(\sqrt{3},0,0)$，$B(0,-1,0)$，$E(0,-1,2)$，$F(0,1,4)$，$M\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},2\right)$

设平面 CBE 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}$

所以 $\begin{cases}-\sqrt{3}x-y=0\\ 2z=0\end{cases}$ 取 $y=\sqrt{3}$，则 $\vec{n}=(-1,\sqrt{3},0)$，

设 ME 与平面 CBE 所成的角为 α，则 $\sin\alpha=|\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{ME}\rangle|=\frac{1}{2}$，…………………………… 11 分

因为 $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，故 ME 与平面 CBE 所成角的大小为 $\frac{\pi}{6}$. ………………………… 12 分

(2)另解：

由于 $EM/\!/BN$，所以即求 BN 与平面 CBE 所成的角.

又因为 $FA\perp$ 面 ABC，$FA\subset$ 面 EBC，所以面 $ABC\perp$ 面 EBC，

而 $BN\subset$ 面 ABC，面 $ABC\cap$ 面 $EBC=BC$，所以 BN 在面 EBC 的投影为 BC，则 $\angle CBN$ 即为所求角.

………………………………………………………………………………………… 9 分

而 $ME=BN=\sqrt{3}$，$BA=BC=2$，所以 $MC=1$，$AC=2$，

则 $\triangle ABC$ 为正三角形，而 N 是 AC 的中点，所以 $\angle CBN=\frac{\pi}{6}$，

故 ME 与平面 CBE 所成角的大小为 $\frac{\pi}{6}$. …………………………………………………… 12 分

19. 解：(1) $\because f'(x)=2x+\frac{1}{x}+a$，$\therefore f'(1)=a+3$，由题知 $f'(1)=1$，$\therefore a+3=1\Rightarrow a=-2$ ………… 4 分

(2)不妨设 $0<x_1<x_2\leqslant 2$，则 $e^{x_1}-e^{x_2}<0$，由题可得：$f(x_1)-f(x_2)-x_1^2+x_2^2<m(e^{x_1}-e^{x_2})\Leftrightarrow f(x_1)-x_1^2-me^{x_1}<f(x_2)-x_2^2-me^{x_2}$，设 $g(x)=f(x)-x^2-me^x$，则：$g(x_1)<g(x_2)$

故 $g(x)$ 在 $(0,2]$ 单调递增，从而有：$g'(x)=\frac{1}{x}-2-me^x\geqslant 0\Leftrightarrow m\leqslant e^{-x}\left(\frac{1}{x}-2\right)$ 在 $(0,2]$ 上恒成立，

设 $h(x)=e^{-x}\left(\frac{1}{x}-2\right)$，则 $m\leqslant h(x)_{\min}$ ……………………………………………… 7 分

$\because h'(x)=-e^{-x}\left(\frac{1}{x}-2\right)+e^{-x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=e^{-x}\cdot\frac{2x^2-x-1}{x^2}(0<x\leqslant 2)$

$h'(x)>0\Rightarrow 2x^2-x-1=(2x+1)(x-1)>0\Rightarrow 1<x\leqslant 2$

$h'(x)<0\Rightarrow 0<x<1$

$\therefore h(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，在 $(1,2]$ 单调递增.

又 $h(1)=-\frac{1}{e}$，故 $h(x)$ 在 $(0,2]$ 上最小值 $h(x)_{\min}=-\frac{1}{e}$

从而有 $m\leqslant-\frac{1}{e}$，即 $m\in\left(-\infty,-\frac{1}{e}\right]$ ………………………………………… 12 分

20. 解：(1) X 的分布列为

X	5	10
P	$1-p$	p

$E(X)=5(1-p)+10p=5+5p$ ………………………………………………………… 3 分

(2) 开空调时每日用电量：峰段 $10\times30\%=3$ 度，谷段 $10\times40\%=4$ 度，平段 $10\times30\%=3$ 度，

则 $a=3\times0.6+4\times0.4+3\times0.5=4.9$ 元

不开空调时每日用电量：峰段 $5\times60\%=3$ 度，谷段 $5\times20\%=1$ 度，平段 $5\times20\%=1$ 度

则 $b=5\times0.6+1\times0.4+1\times0.5=2.7$ 元

Y	2.7	4.9
P	$1-p$	p

$E(Y)=2.7(1-p)+4.9p=2.7+2.2p$ ………………………………………………………… 7 分

(3) 分时电价总电费为 $30(2.7+2.2p)=81+66p$（元）

30 天总用电量 $30(5+5p)=150+150p$ 度

$p\leqslant0.2$ 时，阶梯电价总电费为 $0.45(150+150p)=67.5(1+p)$（元）

$p>0.2$ 时，阶梯电价总电费为 $0.45\times180+0.6\times(150+150p-180)=63+90p$（元）

所以，$p\leqslant0.2$ 时，$81+66p-67.5(1+p)=13.5-1.5p\leqslant0,\Rightarrow p\geqslant9$，不成立；

$p>0.2$ 时，$81+66p-63-90p=18-24p\leqslant0,p\geqslant\frac{3}{4}$

综上，$p\in\left[\frac{3}{4},1\right)$ 时，下个月使用分时电价计价的费用不超过使用阶梯电价的计价方式的费用.

………………………………………………………………………………………… 12 分

21. 解：(1) 由题可得：$\begin{cases}\frac{b}{a}=\frac{1}{2}\\ \frac{c}{\sqrt{1^2+2^2}}=1\\ c^2=a^2+b^2\end{cases}\Rightarrow a=2,b=1\Rightarrow C:\frac{x^2}{4}-y^2=1$ ………………………………… 3 分

(2) 由点 $\left(\frac{2\sqrt{3}m}{3},\frac{2\sqrt{3}k}{3}\right)$ 在 $C:\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 上可得：$m^2-4k^2=3$.

联立 $y=kx+m$ 和 $C:\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 整理得：$(1-4k^2)x^2-8kmx-4(m^2+1)=0$

设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，则有：$x_1+x_2=\frac{8km}{1-4k^2},x_1\cdot x_2=\frac{-4(m^2+1)}{1-4k^2}$,

$\Delta=16(m^2-4k^2+1)=64>0$

又由直线交左右两支各一点可得：$x_1\cdot x_2=\frac{-4(m^2+1)}{1-4k^2}<0\Rightarrow1-4k^2>0\Rightarrow k^2<\frac{1}{4}$

$|PQ|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{8\sqrt{1+k^2}}{1-4k^2}$

$A(-2,0)$到直线 $l:y=kx+m$ 的距离 $d_1=\dfrac{|-2k+m|}{\sqrt{k^2+1}}$,

$B(2,0)$到直线 $l:y=kx+m$ 的距离 $d_2=\dfrac{|2k+m|}{\sqrt{k^2+1}}$

$\therefore d_1d_2=\dfrac{|m^2-4k^2|}{k^2+1}=\dfrac{3}{k^2+1}\Rightarrow S_1S_2=\left(\dfrac{1}{2}|PQ|d_1\right)\left(\dfrac{1}{2}|PQ|d_2\right)=\dfrac{48}{(1-4k^2)^2}=432$

$\Rightarrow 3(1-4k^2)=1\Rightarrow k^2=\dfrac{1}{6}(\because 1-4k^2>0)$ ………………………………………… 7 分

又 $k_1k_2=\dfrac{y_1}{x_1+2}\cdot\dfrac{y_2}{x_2-2}=\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2+2(x_2-x_1)-4}$,

其中 $y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=\dfrac{m^2-4k^2}{1-4k^2}=\dfrac{3}{1-4k^2}$

$x_1x_2+2(x_2-x_1)-4=\dfrac{-4(m^2+1)}{1-4k^2}+2\dfrac{8}{1-4k^2}-4=\dfrac{-4}{1-4k^2}$

$\therefore k_1k_2=\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2+2(x_2-x_1)-4}=-\dfrac{3}{4}$ ………………………………………………… 11 分

假设存在实数 λ,使得 $-k_1,\lambda k,k_2$ 成等比数列,则有

$\lambda^2k^2=-k_1k_2\Rightarrow\dfrac{1}{6}\lambda^2=\dfrac{3}{4}\Rightarrow\lambda=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$,故存在 $\lambda=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$满足题意 ……………………………… 12 分

22. 解:(1)首先发现$f(0)=0$,而$f'(x)=\cos x-\dfrac{1}{x+1}$,

$x\in(-1,0]$时,$\cos x\leqslant 1,\dfrac{1}{x+1}\geqslant 1$,$f'(x)\leqslant 0$, $f(x)$单减

则$f(x)\geqslant f(0)=0$成立;

$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时,$f''(x)=-\sin x+\dfrac{1}{(x+1)^2}$在$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时单减,

$f''(0)=1>0, f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1+\dfrac{1}{(\frac{\pi}{2}+1)^2}<-1+1=0$,

所以存在 $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $f''(x_0)=0$, $f'(x)$在$(0,x_0)$单增,$\left(x_0,\dfrac{\pi}{2}\right)$单减,

而$f'(0)=0$,所以$f'(x_0)>0$,又$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$

所以存在$x_1\in\left(x_0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $f'(x_1)=0$, $f'(x)$在$(0,x_1)$单增,$\left(x_1,\dfrac{\pi}{2}\right)$单减,由于$\dfrac{\pi}{2}+1<e$,所以$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1-\ln\left(\dfrac{\pi}{2}+1\right)>1-1=0$,

所以在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上$f(x)>0$

综上，$f(x)\geqslant 0$在$x\in\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$恒成立得证. ······································ 5分

(2)由(1)，$f\left(\frac{1}{2n}\right)>0,\sin\frac{1}{2n}>\ln\left(\frac{1}{2n}+1\right)$

所以$\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{4}+\sin\frac{1}{6}+\cdots+\sin\frac{1}{2n}>\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{5}{4}+\ln\frac{7}{6}+\cdots\ln\frac{2n+1}{2n}$

从而$\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{4}+\sin\frac{1}{6}+\cdots+\sin\frac{1}{2n}>\ln\frac{4}{3}+\ln\frac{6}{5}+\ln\frac{8}{7}+\cdots\ln\frac{2n+2}{2n+1}$

两式相加得：

$2\left(\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{4}+\sin\frac{1}{6}+\cdots+\sin\frac{1}{2n}\right)>\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\ln\frac{5}{4}+\ln\frac{6}{5}+\cdots\ln\frac{2n+2}{2n+1}=\ln(n+1)$

所以左边得证；······································ 8分

又由(1)，$f\left(-\frac{1}{2n}\right)>0,\sin\left(-\frac{1}{2n}\right)>\ln\left(-\frac{1}{2n}+1\right)=\ln\frac{2n-1}{2n},\sin\frac{1}{2n}<\ln\frac{2n}{2n-1}$

所以$\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{4}+\sin\frac{1}{6}+\cdots+\sin\frac{1}{2n}<\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{4}{3}+\ln\frac{6}{5}+\cdots\ln\frac{2n}{2n-1}$

从而$\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{4}+\sin\frac{1}{6}+\cdots+\sin\frac{1}{2n}<\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{5}{4}+\cdots\ln\frac{2n-1}{2n-2}$

两式相加得：

$2\left(\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{4}+\sin\frac{1}{6}+\cdots+\sin\frac{1}{2n}\right)<2\ln 2+\left(\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\ln\frac{5}{4}+\cdots\ln\frac{2n}{2n-1}\right)=2\ln 2+\ln n$

所以右边得证. ······································ 12分

(右边不等式另证)设$a_n=\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{4}+\cdots+\sin\frac{1}{2n}-\frac{1}{2}\ln n-\ln 2$

先证明$\sin x<x$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$成立：

$g(x)=\sin x-x,g'(x)=\cos x-1<0,g(x)$单减，$g(x)<g(0)=0$

则$a_1=\sin\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 1-\ln 2<\frac{1}{2}-\ln 2<0$

而$a_{n+1}-a_n=\sin\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2}\ln n-\frac{1}{2}\ln(n+1)<\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2}\ln\frac{n}{n+1}$

设$t=\frac{n}{n+1}\in(0,1)$，构造$h(t)=\frac{1}{2}(1-t)+\frac{1}{2}\ln t$，

$h'(t)=\frac{1}{2}\left(-1+\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-t}{t}$可知在$(0,1)$，$h(t)$单增，$h(t)<h(1)=0$

所以$a_{n+1}-a_n<0,a_n$单减，则$a_n<a_1<0$