

赣州市 2022~2023 学年度第一学期期末考试 高三数学试卷（文科）参考答案

一、选择题

题目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	C	B	A	D	C	B	C	A	C	B	A

12. 设 $g(x) = f(x) - x^2$, 则 $g'(x) = f'(x) - 2x$, 当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $g'(x) = f'(x) - 2x < 0$,

即 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 而 $f(-x) - f(x) = 0 \Rightarrow f(-x) = f(x)$,

所以 $g(-x) = f(-x) - (-x)^2 = f(x) - x^2$, 故 $g(x)$ 是偶函数, 所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调

递增, 因为 $f(2a-2) - f(a-4) \geq 3a^2 - 12$,

所以 $f[2(a-1)] - [2(a-1)]^2 \geq f(a-4) - (a-4)^2 \Rightarrow g[2(a-1)] \geq g(a-4)$,

即 $|2(a-1)| \leq |a-4| \Rightarrow -2 \leq a \leq 2$.

二、填空题

13. $\frac{2\pi}{3}$ (或 120°); 14. $\frac{4}{5}$; 15. $\frac{\sqrt{5}}{2}$; 16. -6.

16. 解: 因为 $\{a_{2n-1}\}$ 是递增数列, 所以 $a_{2n+1} - a_{2n-1} > 0$, 故 $(a_{2n+1} - a_{2n}) + (a_{2n} - a_{2n-1}) > 0$,

因为 $2n+1 > 2n$, 所以 $|a_{2n+1} - a_{2n}| = 2n+1 > |a_{2n} - a_{2n-1}| = 2n$,

所以 $a_{2n+1} - a_{2n} > 0 (n \geq 2)$, 又 $a_3 - a_1 = 5 > 0$, 所以 $a_{2n+1} - a_{2n} > 0 (n \geq 1)$, 因为 $\{a_{2n}\}$ 是

递减数列, 所以 $a_{2n+2} - a_{2n} < 0$, 同理 $a_{2n+2} - a_{2n+1} < 0$, 所以 $\begin{cases} a_{2n+1} - a_{2n} = 2n+1 \\ a_{2n+2} - a_{2n+1} = -(2n+2) \end{cases}$,

所以 $a_{2n+2} - a_{2n} = -1$, 即 $\{a_{2n}\}$ 的首项为 3, 公差为 -1 的等差数列,

即 $a_{20} = 3 + (10-1) \times (-1) = -6$.

三、解答题

17. 解: (1) 根据频数分布表, 完善表格如下:

	男	女	合计
铁杆球迷	30	20	50
非铁杆球迷	25	45	70
合计	55	65	120

赣州市 2022~2023 学年度第一学期期末考试高三文科数学参考答案 1

.....2 分

根据数据得

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{120 \times (30 \times 45 - 20 \times 25)^2}{50 \times 70 \times 55 \times 65} \approx 6.93 > 6.635$$

故有 99% 的把握认为该足球俱乐部的足球爱好者为“铁杆球迷”与“性别”有关.....6 分

(2) 依题意按照分层抽样在所有“铁杆球迷”中按性别分层抽样抽取 5 名中男生和女生分别有 3 人和 2 人, 从 5 人中任意抽取 2 人的基本事件共 10 个, 其中至少有 1 人是女生的基本事件有 7 个, 故选取的两名中至少有 1 名女“铁杆球迷”的概率为 $P = \frac{7}{10}$ 12 分

18. 解 (1) $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x - 1 = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{6}) - 1$ 2 分

令 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$, 得 $k\pi + \frac{\pi}{3} \leq x \leq k\pi + \frac{5\pi}{6}$ 4 分

即函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[k\pi + \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{5\pi}{6}] (k \in \mathbf{Z})$ 5 分

(2) 由 (1) 知 $f(A) = 2 \sin(2A - \frac{\pi}{6}) - 1 = 1$ 得 $\sin(2A - \frac{\pi}{6}) = 1$

所以 $2A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ 即 $A = \frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbf{Z})$

又 $0 < A < \pi$, 得 $A = \frac{\pi}{3}$ 7 分

而 $\vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{AB})$ 得

$$4|\vec{AD}|^2 = (\vec{AC} + \vec{AB})^2 = |\vec{AC}|^2 + |\vec{AB}|^2 + 2\vec{AC} \cdot \vec{AB} = |\vec{AC}|^2 + |\vec{AB}|^2 + 2|\vec{AC}| \cdot |\vec{AB}| \cos A$$

$$= b^2 + c^2 + bc \geq 2bc + bc = 3bc$$

所以 $bc \leq 4$ 当且仅当 $b = c = 2$ 时等号成立.....10 分

此时 $\triangle ABC$ 的面积为 $S = \frac{1}{2}bc \sin A \leq \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

所以 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为 $\sqrt{3}$ 12 分

19. 解 (1) 证明: 由于 $AB \perp$ 面 PAD 且 $AB \parallel CD$, 所以 $CD \perp$ 面 PAD 1 分

所以 $CD \perp AP$ 2 分

由 $PD^2 = AP^2 + AD^2 - 2AP \cdot AD \cos \angle PAD$,

得 $12 = 4 + AD^2 - 2 \times 2 \cdot AD \times \frac{1}{2}$, 即 $AD = 4$ 3 分

所以 $AD^2 = AP^2 + PD^2$, 即 $AP \perp PD$ 4 分

- 所以 $AP \perp$ 面 PCD , 而 $DM \subseteq$ 面 PCD 5 分
- 因此 $AP \perp DM$ 6 分
- (2) 连结 AC, BD 交于点 N , 连 MN 7 分
- 因为 $AP \parallel$ 平面 BDM , $AP \subseteq$ 平面 APC , 平面 $BDM \cap$ 平面 $APC = MN$ 8 分
- 所以 $AP \parallel MN$, 故 $\frac{CM}{PM} = \frac{CN}{AN}$ 9 分
- 在梯形 $ABCD$ 中 $\frac{AB}{CD} = \frac{AN}{NC} = \frac{1}{3}$ 10 分
- 所以 $\frac{PM}{PC} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{4} = \lambda$, 即当 $AP \parallel$ 平面 BDM 时 λ 的值为 $\frac{1}{4}$ 12 分
20. 解: (1) $h(x) = e^x(-x^2 + 2x + a)$, 所以 $h'(x) = e^x(a + 2 - x^2)$ 1 分
- ① 当 $a + 2 \leq 0$ 即 $a \leq -2$ 时, $h'(x) \leq 0$ 恒成立, 函数 $h(x)$ 在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 上为单调递减函数2 分
- ② 当 $a + 2 > 0$ 即 $a > -2$ 时, 令 $h'(x) > 0$ 得: $-\sqrt{a+2} < x < \sqrt{a+2}$
- 令 $h'(x) < 0$ 得: $x < -\sqrt{a+2}$ 或 $x > \sqrt{a+2}$ 3 分
- 所以, 函数 $h(x)$ 在 $x \in (-\sqrt{a+2}, \sqrt{a+2})$ 上为单调递增函数,
- 在 $x \in (-\infty, -\sqrt{a+2})$ 和 $x \in (\sqrt{a+2}, +\infty)$ 上为单调递减函数5 分
- (2) 构造 $F(x) = f(x) - g(x) = e^x + x^2 - 2x - a$, 所以 $F'(x) = e^x + 2x - 2$ 6 分
- 记 $m(x) = F'(x)$, $m'(x) = e^x + 2 > 0$ 恒成立, 即 $m(x)$ 在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 上单调递增7 分
- 而 $m(0) = e^0 - 2 = -1 < 0, m(\frac{1}{2}) = \sqrt{e} - 1 > 0$,
- 所以存在唯一的 $x_0 \in (0, \frac{1}{2})$ 使得 $m(x_0) = 0$, 即 $e^{x_0} + 2x_0 - 2 = 0$ 8 分
- 所以 $f'(x_0) = e^{x_0}, g'(x_0) = -2x_0 + 2$, 所以 $f'(x_0) = g'(x_0)$,
- 即曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 在点 M 处有相同的切线9 分
- 又知 $F(x)$ 在 $x \in (-\infty, x_0)$ 上单调递减, 在 $x \in (x_0, +\infty)$ 上单调递增, 即 $F(x)_{\min} = F(x_0)$,
- 由于函数 $y = f(x)$ 的图象与函数 $y = g(x)$ 的图象仅有一个交点 M ,
- 所以 $F(x_0) = 0$, 即 $e^{x_0} + x_0^2 - 2x_0 - a = 0$ 10 分
- $a = e^{x_0} + x_0^2 - 2x_0 = x_0^2 - 4x_0 + 2 = (x_0 - 2)^2 - 2$, $x_0 \in (0, \frac{1}{2})$, 所以 $a \in (\frac{1}{4}, 2)$ 11 分

综上, 曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 在点 M 处有相同的切线, 且 $a \in (\frac{1}{4}, 2)$ 12 分

21. 解: (1) 设 $M(x, y), P(x_0, y_0)$, 则 $Q(0, y_0)$ 1 分

由 $(1-\sqrt{3})\vec{OQ} = \vec{OP} - \sqrt{3}\vec{OM}$ 得 $\vec{PQ} = \sqrt{3}\vec{MQ}$, 即 $(-x_0, 0) = \sqrt{3}(-x, y_0 - y)$ 2 分

将 $\begin{cases} x_0 = \sqrt{3}x \\ y_0 = y \end{cases}$ 代入得 $(\sqrt{3}x)^2 + y^2 = 12$, 即 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12} = 1$ 3 分

所以动点 M 的轨迹方程 $C: \frac{y^2}{12} + \frac{x^2}{4} = 1$ 4 分

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), D(m, n)$

联立 $\begin{cases} y = kx + 2 \\ \frac{y^2}{12} + \frac{x^2}{4} = 1 \end{cases}$ 得 $(k^2 + 3)x^2 + 4kx - 8 = 0$ 5 分

所以 $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-4k}{k^2 + 3} \\ x_1 x_2 = \frac{-8}{k^2 + 3} \end{cases}$ 6 分

因为 $\vec{DA} \cdot \vec{AB} + \vec{DA}^2 = \vec{DA} \cdot \vec{DB} = (x_1 - m)(x_2 - m) + (y_1 - n)(y_2 - n)$

$= (x_1 - m)(x_2 - m) + (kx_1 + 2 - n)(kx_2 + 2 - n)$ 7 分

$= x_1 x_2 - m(x_1 + x_2) + m^2 + k^2 x_1 x_2 + k(2 - n)(x_1 + x_2) + (2 - n)^2$

$= \frac{-8}{k^2 + 3} - m \frac{-4k}{k^2 + 3} + m^2 + k^2 \frac{-8}{k^2 + 3} + k(2 - n) \frac{-4k}{k^2 + 3} + (2 - n)^2$

$= \frac{(4n - 16)k^2 + 4mk - 8}{k^2 + 3} + m^2 + (2 - n)^2$ 9 分

$= \frac{4mk - 12n + 40}{k^2 + 3} + m^2 + n^2 - 12$ 为定值10 分

所以 $\begin{cases} m = 0 \\ -12n + 40 = 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} m = 0 \\ n = \frac{10}{3} \end{cases}$ 11 分

所以存在定点 $D(0, \frac{10}{3})$, 使得 $\vec{DA} \cdot \vec{AB} + \vec{DA}^2$ 为定值 $-\frac{8}{9}$ 12 分

22. 解: (1) 直线 l 的普通方程为 $x - y - 1 = 0$ 2 分

由 $\rho = 2\sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4})$ 得 $\rho = 2 \cos \theta + 2 \sin \theta$, 则 $\rho^2 = 2\rho \cos \theta + 2\rho \sin \theta$

曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ 5 分

(2) 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 4 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数)6 分

设点 A, B 对应的参数分别为 t_1, t_2 ,

将 $\begin{cases} x = 4 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ 代入 $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ 得 $t^2 + 5\sqrt{2}t + 11 = 0$ 7 分

则 $t_1 + t_2 = -5\sqrt{2}$, $t_1 t_2 = 11$, 则 $t_1 < 0, t_2 < 0$ 8 分

则 $\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|} = \frac{1}{|t_1|} + \frac{1}{|t_2|} = \frac{|t_1| + |t_2|}{|t_1 t_2|} = \frac{-(t_1 + t_2)}{t_1 t_2} = \frac{5\sqrt{2}}{11}$ 10 分

23. 解: (1) 由题意得 $f(x) = 2|x+1| + |x+2| = \begin{cases} -3x-4, & x \leq -2 \\ -x, & -2 < x \leq -1 \\ 3x+4, & x > -1 \end{cases}$ 3 分

从而函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 递减, 在 $(-1, +\infty)$ 上递增4 分

故 $f(x)_{\min} = f(-1) = 1$, 即 $m = 1$ 5 分

(2) 由 (1) 知: $a + b + c = 1$, 又 a, b, c 为正数,

由 $a^2 + b^2 \geq 2ab, a^2 + c^2 \geq 2ac, b^2 + c^2 \geq 2bc$ 6 分

法一: $\frac{a^2 + b^2}{c} + \frac{c^2 + a^2}{b} + \frac{b^2 + c^2}{a} \geq \frac{2ab}{c} + \frac{2ac}{b} + \frac{2bc}{a}$ 7 分

而 $\frac{2ab}{c} + \frac{2ac}{b} + \frac{2bc}{a} = a(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}) + b(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}) + c(\frac{b}{a} + \frac{a}{b})$ 8 分

所以 $\frac{a^2 + b^2}{c} + \frac{c^2 + a^2}{b} + \frac{b^2 + c^2}{a} \geq 2(a + b + c) = 2$ 10 分

法二: 由 $\frac{a^2}{b} + b \geq 2a, \frac{b^2}{a} + a \geq 2b, \frac{c^2}{c} + c \geq 2a$,

$\frac{c^2}{a} + a \geq 2c, \frac{b^2}{c} + c \geq 2b, \frac{a^2}{b} + b \geq 2c$ 8 分

得 $\frac{a^2 + b^2}{c} + \frac{c^2 + a^2}{b} + \frac{b^2 + c^2}{a} \geq 2(a + b + c) = 2$ 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线