

绝密★启用前

三湘名校教育联盟·2023届高三第二次大联考

数 学

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 5x - 6 \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$, 则 $\complement_{\mathbb{R}} A =$

- A. $(-1, 6)$ B. $(-6, 1)$ C. $(2, 3)$ D. $[-6, 1]$

2. 已知 $a, b \in \mathbb{R}$, i 为虚数单位, 若 $\frac{a+bi}{2+i} = 1-2i$, 则 $|a+bi| =$

- A. 3 B. 5 C. 9 D. 25

3. 从 1, 2, ..., 9 这九个数字中任取两个, 这两个数的和为质数的概率为

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{4}{9}$ C. $\frac{7}{18}$ D. $\frac{13}{36}$

4. 已知定义在 \mathbb{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) = -f(x)$, $f(x+2) = -f(2-x)$, 且当 $x \in (-2, 2)$ 时, $f(x) = x^3 - 3x$, 则函数 $f(x)$ 在 $[-6, 6]$ 上的零点个数为

- A. 9 B. 11 C. 13 D. 15

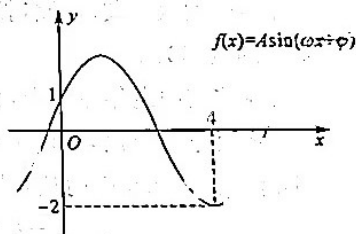
5. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的部分图象如图所示, 则下列说法正确的是

A. $f(x) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}x + \frac{5\pi}{6}\right)$

B. 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[6k\pi - 2, 6k\pi + 1]$ ($k \in \mathbb{Z}$)

C. 函数 $f(x)$ 在区间 $[-2\pi, 2\pi]$ 上有且仅有 5 个零点

D. 函数 $g(x) = f(x) + f(x+1)$ 的最大值为 $2\sqrt{3}$



6. 设 $a = \frac{5}{2} - \frac{2}{\sqrt{e}}$, $b = 2 - \ln 2$, $c = \sqrt{e} - \frac{1}{2}$, 则

A. $a > b > c$

B. $c > a > b$

C. $c > b > a$

D. $b > a > c$

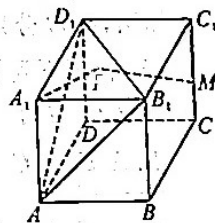
7. 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 在 $\triangle AB_1D_1$ 内部 (不含边界) 运动, 点 M 在线段 CC_1 (不含端点) 上, 若存在点 P 使得 $|PM| - |PA_1|$ 有最大值, 则 $|CM|$ 的取值范围是

A. $(0, \frac{1}{2})$

B. $(0, \frac{1}{3})$

C. $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$

D. $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$



【高三数学 第 1 页 (共 6 页)】

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n + 1, & a_n \text{ 为偶数} \\ 2a_n, & a_n \text{ 为奇数} \end{cases}$, 且 $a_1 \in \mathbb{N}^*$, 则下列说法正确的有

- ① 存在 $a_1 \in \mathbb{N}^*$, 使得 $a_5 = 37$;
 ② 若 $a_1 = 1$, 则 $a_{2n-1} = \frac{4^n - 1}{3}$;
 ③ 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n \geq (2^n - 1) \cdot a_1$;
 ④ 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n \leq (2^n - 1) \cdot (a_1 + 1) - n$.

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知某校共有教师 300 人, 他们的政治面貌构成比例饼状图如图 1 所示, 其中各类型中老年教师(45 周岁以上)和中青年教师(45 周岁以下, 含 45 周岁)的百分比堆积柱状图如图 2 所示, 则下列说法正确的有

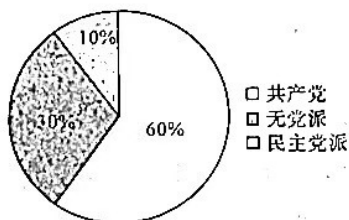


图 1

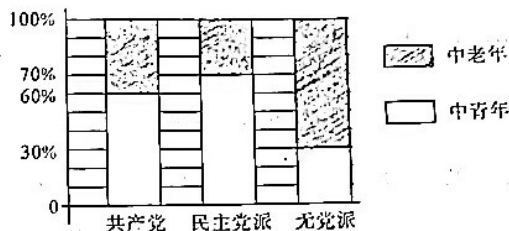


图 2

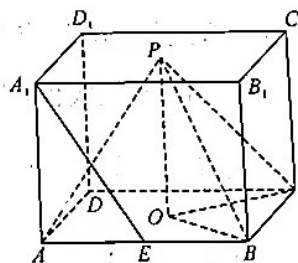
- A. 该校中青年教师中, 共产党员占比超过了 $\frac{2}{3}$
 B. 逐个抽取该校若干名教师进行调查, 则被抽取的第二名教师恰好是中青年无党派教师的概率为 9%
 C. 在该校中老年教师中, 根据政治面貌的不同按照等比例分层抽样抽取 16 名教师组成学校督学专家团, 则民主党派共有 2 名教师入选
 D. 依据 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验, 该校教师是否为共产党员与年龄有关

附: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, $n = a + b + c + d$.

α	0.050	0.010	0.001
χ_{α}^2	3.841	6.635	10.828

10. 如图, P, O 分别是正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 上, 下底面的中心, E 是 AB 的中点, $AC = 2AA_1$, 则下列结论正确的有

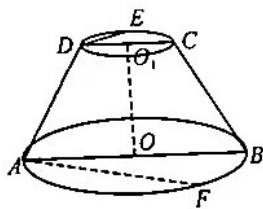
- A. $OC \perp PB$
 B. $A_1E \parallel PC$
 C. 异面直线 A_1E 与 PA 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$
 D. 平面 PAD 与平面 PBC 夹角的余弦值为 $\frac{1}{3}$



11. 古希腊数学家尼科梅德斯在努力解决三等分角这一古希腊几何作图题时,发现一种特殊的曲线——蚌线. 已知蚌线的定义为:过定点 O 的直线交不过 O 的定直线 $l: x=b$ 于 Q , 在 OQ 上取点 P , 使 $|QP|=a(a>0)$, 则 P 的轨迹称为蚌线. 关于蚌线的性质, 下列说法正确的是
- A. 若直线 l 的方程为 $x=1$, 当 $a=2$ 时, 点 P 的轨迹方程为 $(x-1)^2(x^2+y^2)=4x^2$
- B. 蚌线不存在对称性
- C. 不论 a 与 b 的大小关系如何, 蚌线一定经过定点 O
- D. 存在两条平行于直线 l 的直线, 使得蚌线上所有的点都在这两条直线之间
12. 已知 O 为坐标原点, F_1, F_2 分别是双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的左, 右焦点, 过 F_2 的直线交双曲线 C 的右支于 P, Q 两点, 且点 $P(x_1, y_1)$ 在第一象限内, I 是 $\triangle PF_1Q$ 的内心. 若双曲线 C 在点 P 处的切线方程为 $x_1x - \frac{y_1}{3}y = 1$, 则下列说法正确的有
- A. 直线 PI 的方程为 $x_1x - \frac{y_1}{3}y = 1$
- B. 若 PF_1 的中点为 M , 直线 MO 与直线 PI 交于点 E , 则点 E 在定圆上
- C. 点 I 在定直线 $x=1$ 上
- D. $IF_2 \perp PQ$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. $(\frac{1}{x^2} + x)^n$ 的展开式中第 3 项与第 8 项的二项式系数相等, 则 $(\frac{1}{x^2} + x)^n$ 的展开式中常数项为 _____ . (用数字作答)
14. 与曲线 $y=x^2$ 和 $y=\ln(2x)$ 都相切的直线方程可以是 _____ .
15. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>b>0)$ 的上顶点为 A , 左, 右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 且垂直于 AF_2 的直线与 C 交于点 D , 与 AF_2 交于点 M , 且 $AF_1 \parallel DF_2$, 则 $\frac{|MF_1|}{|AF_1|} =$ _____ .
16. 如图, 在圆台 O_1O 中, CD, AB 分别为上, 下底面的直径, 且 $AB \parallel DC$, $AB=3DC=6$, E 为上底圆周上的一点, F 为下底圆周上的一点, 则 $\vec{DE} \cdot \vec{AF}$ 的最小值为 _____ .



【高三数学 第 3 页(共 6 页)】

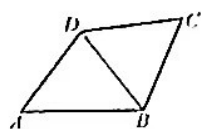
四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

如图，在凸四边形 $ABCD$ 中， $AB=AD=CD=2$ ， $BC=BD$ 。

(1) 若 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BCD$ 的面积比为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，求 $\sin \angle DBC$ 的值；

(2) 求 $\sin A \cdot \sin C$ 的最大值。

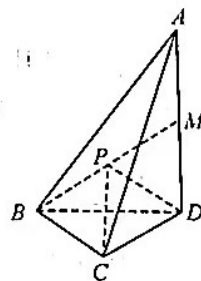


18. (本小题满分 12 分)

如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中， $AD \perp$ 平面 BCD ， M 为线段 AD 的中点，且 $AD=BM=2CD=4$ ， $BC=2\sqrt{2}$ ， P 为线段 BM 的中点。

(1) 在平面 ACD 内找一点 Q ，使得 $PQ \perp$ 平面 ACD ，并说明理由；

(2) 求直线 AB 与平面 CPD 所成角的正弦值。



19. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3, 2a_{n+1} - a_n a_{n+1} = 1$.

(1) 记 $b_n = \frac{1}{a_n - 1}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $c_n = (a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n)^2$, S_n 为数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和, 求证: $S_n < 23$.

20. (本小题满分 12 分)

已知圆 $C: x^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}$, 动圆 M 与圆 C 相外切, 且与直线 $y = -\frac{1}{2}$ 相切.

(1) 求动圆圆心 M 的轨迹 E 的方程;

(2) 点 P 是(1)中曲线 E 上任意一点, 曲线 E 在点 P 处的切线为 l , 过点 $Q(0, 5)$ 且与 l 平行的直线交曲线 E 于 A, B 两点, 当 $PA \perp PB$ 时, 求点 P 的纵坐标.

1

21. (本小题满分 12 分)

第二十二届世界杯足球赛, 于 2022 年 11 月 21 日至 12 月 18 日在卡塔尔进行. 最终阿根廷队和法国队成功闯入决赛. 决赛精彩纷呈, 在 90 分钟的常规时间和 30 分钟的加时赛中, 两队互有攻守, 未分胜负. 由此比赛进入残酷的点球大战.

根据队员的历史数据统计, 已知阿根廷队前两个踢点球的梅西和迪巴拉踢进点球的概率为 0.9, 其他队员踢进点球的概率为 0.8; 法国队第一个踢点球的姆巴佩踢进点球的概率为 0.9, 其他队员踢进点球的概率为 0.7.

(1) 已知在本次点球大战中, 阿根廷队前两个踢点球的梅西和迪巴拉都踢进了点球, 法国队第一个踢点球的姆巴佩踢进了点球, 第二个踢点球的队员没有踢进点球, 求在上述事件发生的条件下, 两队没有进入突然死亡阶段的概率(答案保留两位有效数字);

(2) 已知在本次点球大战前六个球员踢出的比分是 3:2 (阿根廷暂时领先法国队), 且阿根廷队在没有进入突然死亡阶段就以 4:2 的比分获得了胜利. 记 X 为在本次点球大战中双方已经踢了点球队员的人数之和, 求 X 的数学期望.

点球规则:

点球大战是 5 球制, 每支队伍选拔 5 名球员, 球员按照确定好的顺序各踢一次点球, 裁判员选择一个球门, 抽签决定哪个队先踢, 然后双方交替各踢 5 次点球, 进球多者获胜. 若双方在未踢满 5 次点球时, 比如一方已肯定获胜, 裁判员即可终止踢点球, 宣布获胜队(比如甲队踢了 4 次点球, 乙队踢了 3 次点球, 其中甲队进了 4 球, 乙队进了 1 球, 此时比分为 4:1, 后面不管情况如何, 甲队一定获胜, 此时裁判员即可终止踢点球, 宣布甲队获胜); 如果双方选出的 5 名球员进球数再相同, 就进入突然死亡阶段, 就是双方继续互罚, 如果有方踢进, 一方未踢进则整场比赛结束, 进球的一方获得整场比赛的胜利.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^x - x$.

(1) 若函数 $y = f(x+a) - a$ 有两个零点 x_1, x_2 , 证明: $|x_2 - x_1| < 2a$;

(2) 当 $f(x+a) + \frac{1}{2}x^2 \geq |a|$ 恒成立时, 求实数 a 的取值范围.

【高三数学 第 6 页(共 6 页)】

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线