绝密★启用前

2021年普通高等学校招生全国统一考试(样卷一)

数学理科

本试卷共23题，共150分，考试时间120分钟，考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内.
2. 选择题必须使用2B铅笔填涂；非选择题必须使用0.5毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整，笔迹清楚.
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效.
4. 作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑.
5. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱. 不准使用涂改液、修正带、刮纸刀.

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|x^2+3<4x\}$，$B\subseteq \mathbf{N}^*$，且 $A\cap B\neq\varnothing$，则下列结论中一定正确的是

A. $1\in A$　　B. $B=\{2\}$　　C. $2\in B$　　D. $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\varnothing$

2. 若纯虚数 z 满足 $z=\dfrac{a+3i}{1-2i}(a\in\mathbf{R})$，则 $z=$

A. $-3i$　　B. $-2i$　　C. $2i$　　D. $3i$

3. 为达成“碳达峰、碳中和”的目标，我们需坚持绿色低碳可持续发展道路. 可再生能源将会有一个快速发展的阶段. 太阳能是一种可再生能源，光伏是太阳能光伏发电系统的简称，主要有分布式与集中式两种方式. 下面的图表是近年来中国光伏市场发展情况表. 则下列结论中正确的是

A. 2013～2020年，年光伏新增装机规模同比(与上年相比)增幅逐年递减

B. 2013～2020年，年光伏发电量与年份成负相关

C. 2013～2020年，年新增装机规模中，分布式的平均值大于集中式的平均值

D. 2013～2020年，每年光伏发电量占全国发电总量的比重与年份成正相关

4. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_5=5a_5+5$，则公差 $d=$

A. -1　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 1

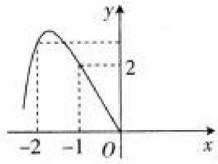
5. 已知 F_1,F_2 是椭圆 $E:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左、右焦点，P 是 E 上在第一象限内一点，F_1 关于直线 PF_2 的对称点为 A，F_2 关于直线 PF_1 的对称点为 B，则 $|AB|$ 的最大值为

A. $4\sqrt{2}$　　B. 5　　C. $\frac{9}{2}$　　D. 4

6. $(2x-\frac{1}{\sqrt{x}})^7$ 展开式中 x^{-2} 的系数为

A. -14　　B. 14　　C. -84　　D. 84

7. 已知定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$ 的部分图象如图所示，$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，则



A. $f(2)=-1$

B. $f(1)\cdot f(2)<4$

C. $f'(1)\cdot f'(2)<0$

D. 方程 $f'(x)=0$ 无解

8. 已知圆 $M:(x-2)^2+(y-1)^2=1$，圆 $N:(x+2)^2+(y+1)^2=1$，则下列不是 M,N 两圆公切线的直线方程为

A. $y=0$　　B. $4x-3y=0$

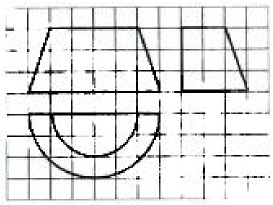
C. $x-2y+\sqrt{5}=0$　　D. $x+2y-\sqrt{5}=0$

9. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,\sqrt{3})$，$\boldsymbol{b}=(x,1)$，则下列所有正确结论的序号是

① $\exists x\in(-\infty,0)$，使得 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/\!/\boldsymbol{b}$　② $\exists x\in(0,+\infty)$，使得 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$　③ $\forall x\in[0,+\infty)$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 小于 $\frac{\pi}{3}$　④ $\forall x\in(-\infty,0]$，$|2\boldsymbol{a}-\sqrt{3}\boldsymbol{b}|>\sqrt{7}$

A. ①③　　B. ①④　　C. ②③　　D. ②④

10. 如图，网格纸上的小正方形的边长为 1，粗实线画出的是某几何体的三视图，则该几何体的外接球的表面积为



A. $\frac{116\pi}{3}$

B. $\frac{340\pi}{9}$

C. $\frac{532}{3}\pi$

D. $\frac{340\sqrt{85}}{81}\pi$

11. 已知 $2^a=\ln b=e^c=\log_2 d$，则

A. $\log_2(b-d)>e^{a-c}$　　B. $e^{a+b}>e^{c+d}$

C. $\ln|a-c|<2^{b-d}(a\neq c)$　　D. $(\frac{1}{2})^{b+c}<(\frac{1}{2})^{a+d}$

12. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=a$，$a_{n+1}=4(a_n-a_n^2)(n\in\mathbf{N}^*)$，若 $a_6=0$，则实数 a 的不同取值的个数为

A. 17　　B. 16　　C. 15　　D. 14

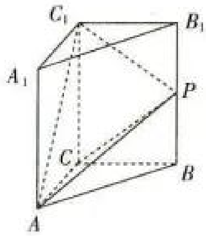
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2\\0\leqslant x-y\leqslant 1\end{cases}$，则 $z=x+2y$ 的最大值为________.

14. 已知函数 $f(x)=\pi\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})(\omega>0)$，设 A,B 是函数图象的两条相邻对称轴与函数图象的交点，且 $|AB|=\frac{5}{2}\pi$，则 $\omega=$________.

15. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的焦距为 $2c$，A 是 C 的右顶点，在 C 的一条渐近线上存在 M,N 两点，使得 $|AM|=|AN|=c$，且 $\angle MAN=120^\circ$，则 C 的离心率为________.

16. 2020 年底，中国科学家成功构建了 76 个光子的量子计算机“九章”，推动全球量子计算的前沿研究达到一个新高度. 该量子计算机取名“九章”，是为了纪念中国古代著名的数学专著《九章算术》. 在《九章算术》中，底面是直角三角形的直三棱柱被称为“堑堵”. 如图，棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为一“堑堵”，P 是 BB_1 的中点，$AA_1=AC=BC=2$，设平面 α 过点 P 且与 AC_1 平行，现有下列四个结论：



①当平面 α 截棱柱的截面图形为等腰梯形时，该图形的面积等于 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$；

②当平面 α 截棱柱的截面图形为直角梯形时，该图形的面积等于 $2\sqrt{2}$；

③异面直线 AC_1 与 CP 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$；

④三棱锥 C_1-ACP 的体积是该“堑堵”体积的 $\frac{1}{3}$.

所有正确结论的序号是________.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

17. (12 分)

已知△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$c(1+\cos A)=\sqrt{3}a\sin C$.

(1)求 A；

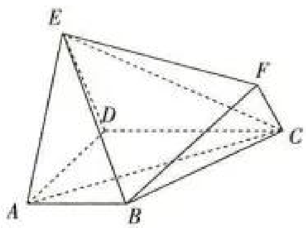
(2)若 $a=2\sqrt{3}$，$B<A$，D 为 BC 的中点，且 $AD=\sqrt{5}$，求 b.

18. (12 分)

如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 和 $CDEF$ 均为直角梯形，$AB/\!/CD$，$CF/\!/DE$，且 $\angle CDE=\angle CDA=\frac{\pi}{2}$，$CD=AD=2AB=4$，$DE=AE=2CF=2\sqrt{5}$.

(1)求证：$BF/\!/$平面 ACE.

(2)求直线 AC 与平面 BEF 所成角的正弦值.



19. (12 分)

已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，点 $P(t,-2)$ 在 C 上，且 $|PF|=2|OF|$(O 为坐标原点).

(1)求 C 的方程；

(2)若 A,B 是 C 上的两个动点，且 A,B 两点的横坐标之和为 8，求当 $|AB|$ 取最大值时，直线 AB 的方程.

20.(12 分)

中国乒乓球队是中国体育军团的王牌之师,屡次在国际大赛上争金夺银,被体育迷们习惯地称为“梦之队”. 小明是一名乒乓球运动爱好者,为提高乒乓球水平,决定在假期针对乒乓球技术的五个基本因素:弧线、力量、速度、旋转和落点进行训练. 假设小明每天进行多次分项(将五个因素分别对应五项,一次练一项)训练,为增加趣味性,计划每次(从第二次起)都是从上次未训练的四个项目中等可能地随机选一项训练.

(1)若某天在五个项目中等可能地随机选一项开始训练,求第三次训练的是“弧线”的概率;

(2)若某天仅进行了 6 次训练,五个项目均有训练,且第 1 次训练的是“旋转”,前后训练项不同视为不同的训练顺序,设变量 X 为 6 次训练中“旋转”项训练的次数,求 X 的分布列及期望;

(3)若某天规定第一次训练的是“力量”,从第二次起,后面训练项的选择服从上述计划的安排,设 $P_i(i\in\mathbf{N}^*)$表示第 i 次训练的是“力量”的概率,求 P_6 的值.

21.(12 分)

已知函数 $f(x)=x\ln x-ax^2$,$a\in\mathbf{R}$.

(1)设 $a\geqslant\frac{1}{2}$,$g(x)=f(e^x)$,讨论函数 $g(x)$的单调性;

(2)若函数 $f(x)$存在两个不同的极值点 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$,$f(x_2)>0$,求证:$\frac{f(x_2)}{a(x_2-e)}>1$.

(二)选考题:共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做,则按所做的第一题计分.

22.[选修 4—4:坐标系与参数方程](10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=2+t^2\\y=2t^4+1\end{cases}$($t$ 为参数),以坐标原点 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,倾斜角为 α 的直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin(\alpha-\theta)=2\sqrt{3}\sin(\alpha-\frac{\pi}{6})$.

(1)若 $\alpha=\frac{\pi}{2}$,求 l 与 C 的交点的极坐标($\rho\geqslant0,0\leqslant\theta<2\pi$);

(2)若 $\alpha=\frac{\pi}{3}$,设 M 是 C 上的动点,求 M 到 l 的距离的最小值.

23.[选修 4—5:不等式选讲](10 分)

设 a,b,c 为非零实数,且 $a^2+b^2+c^2=3$,证明:

(1)$|a+b+c|\leqslant3$;

(2)$\frac{a^4}{b^2+c^2}+\frac{b^4}{a^2+c^2}+\frac{c^4}{a^2+b^2}\geqslant\frac{3}{2}$.

2021年普通高等学校招生全国统一考试(样卷一)

数学理科参考答案

1.C　本题考查集合的关系与运算. 集合 $A=\{x|1<x<3\}$,则 $2\in B$.

2.A　本题考查复数的概念与运算. 设 $z=bi$,则 $(1-2i)z=2b+bi=a+3i$,所以 $z=3i,\bar{z}=-3i$.

3.D　本题考查统计图表. 根据图表可知,2013~2020年,每年光伏发电量占全国发电总量的比重随年份逐年增加,D项正确.

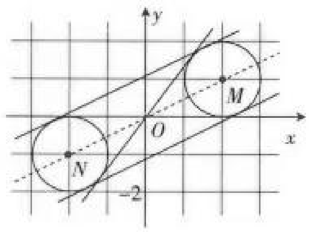
4.B　本题考查等差数列的性质. 在等差数列$\{a_n\}$中,$S_5=5a_5+5=5a_3$,则 $a_5-a_3=2d=-1$,得 $d=-\frac{1}{2}$.

5.D　本题考查椭圆的定义. 由题意知 $|PF_1|=|PA|,|PF_2|=|PB|,|AB|\leqslant|PA|+|PB|=4$,当且仅当 A,P,B 三点共线时取"=".

6.B　本题考查二项式的通项公式. 二项展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_7^r(2x)^{7-r}\cdot(-1)^r\cdot(x^{-\frac{1}{2}})^r=(-1)^r2^{7-r}\cdot C_7^rx^{7-\frac{3}{2}r}$,令 $7-\frac{3}{2}r=-2$,得 $r=6$,所以 x^{-2} 的系数为 $2C_7^6=14$.

7.C　本题考查函数与导数. 由图知 $f(-1)=2,f(-2)>2$,存在 $x_0\in(-2,-1)$,使得 $f'(x_0)=0$,且 $f'(-1)<0$,$f'(-2)>0$,函数 $f(x)$ 是奇函数,所以A、B、D项不正确.

8.D　本题考查直线与圆的位置关系. 如图,圆心 $M(2,1)$,$N(-2,-1)$,半径 $r_1=r_2=1$,两圆相离,有四条公切线.



两圆心坐标关于原点 O 对称,则有两条切线过原点 O,设切线 $l_1:y=kx$,

则圆心到直线的距离 $\frac{|2k-1|}{\sqrt{1+k^2}}=1$,解得 $k=0$ 或 $k=\frac{4}{3}$,

另两条切线与直线 MN 平行且相距为1,$l_{MN}:y=\frac{1}{2}x$,设切线 $l_2:y=\frac{1}{2}x+b$,

则 $\frac{|b|}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}=1$,解得 $b=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$(或通过斜率排除),所以D项不正确.

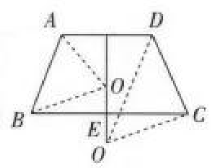
9.C　本题考查平面向量的运算. 若 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/\!/\boldsymbol{b}$,则 $\sqrt{3}x=1$,所以①不正确;

若 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^2$,整理得 $x^2-x+1-\sqrt{3}=0$,方程有正根,所以②正确;

当 $x\geqslant0$ 时,设 $A(1,\sqrt{3})$,则 OA 与两坐标轴的夹角分别为 $\angle xOA=\frac{\pi}{3}$,$\angle yOA=\frac{\pi}{6}$,所以③正确;

$|2\boldsymbol{a}-\sqrt{3}\boldsymbol{b}|=\sqrt{(2-\sqrt{3}x)^2+3}$,当 $x\leqslant0$ 时,$(\sqrt{3}x-2)^2+3\geqslant7$,所以④不正确.

10.B　本题考查三视图与几何体的外接球. 根据三视图可得该几何体为一圆台的一半,对应圆台的上底面半径 $r_1=2$,下底面半径 $r_2=3$,高 $h=3$,设其外接球的半径为 R,轴截面(按圆台)如图所示,设 $OE=x$,若圆台两底面在球心同侧,则 $\begin{cases}R^2-4=(x+3)^2\\R^2-9=x^2\end{cases}$,无解,则圆台两底面在球心异侧,$\begin{cases}R^2-4=(3-x)^2\\R^2-9=x^2\end{cases}$,解得 $x=\frac{2}{3}$,则 $R^2=\frac{85}{9}$,球的表面积为 $\frac{340\pi}{9}$.



11.D　本题考查指对函数的图象与性质. 因为 $2^a>0$,所以 $b>d>1$,

若 $b=e,d=2,a=c=0$,则 $\log_2(b-d)<0<e^{a-c}$,A项不正确;

当 $a\geqslant0$ 时,$a\geqslant c,b>d$,则 $a+b>c+d$,当 $a<0$ 时,$a<c<0,b>d$,不等式不一定成立,B项不正确;

当 $b-d\to0$ 时,$c=a\cdot\ln2$,$c-a=a(\ln2-1)$,当 $a<\frac{e}{\ln2-1}$ 时,存在 $|a-c|>e$,所以C项不正确;

当 $a<0$ 时,$a<c<0,b>d$,则 $b-d>a-c$,

当 $a\geqslant0$ 时,由指对函数的变化趋势,知 $b-d>a-c$,即 $b+c>a+d$ 恒成立,D项正确.

12. A　本题考查数列的递推. 设函数 $y=4(x-x^2)$，由函数图象知，$y=0$ 时，$x=0$ 或 1，

当 $y=1$ 时，$x=\frac{1}{2}$，当 $0<y<1$ 时，方程必有两个不同的解.

设 $a_{k+1}=0$，则 $a_k=0$ 或 $a_k=1$，设第 k 项的不同取值的个数为 $b_1=2$；

当 $a_k=0$ 时，$a_{k-1}=0$ 或 1，当 $a_k=1$ 时，$a_{k-1}=\frac{1}{2}$，第 $k-1$ 项的不同取值的个数设为 $b_2=3$；

当 $a_{k-1}=0$ 时，$a_{k-2}=0$ 或 1，当 $a_{k-1}=1$ 时，$a_{k-2}=\frac{1}{2}$，当 $a_{k-1}=\frac{1}{2}$ 时，a_{k-2} 有两个不同的值，$b_3=5$……

可知在 $\{a_n\}$ 中，当第 $m(m>1,m\in\mathbf{N}^*)$ 项有 $b_i(i\in\mathbf{N}^*)$ 个不同取值时，第 $m-1$ 项的不同取值的个数 $b_{i+1}=2b_i-1$，所以 $b_{i+1}-1=2(b_i-1)$，则 $b_i=2^{i-1}+1$，所以当 $a_{k+1}=0$ 时，a 的不同取值的个数 $b_k=2^{k-1}+1$，当 $k=5$ 时，$b_5=2^{5-1}+1=17$.

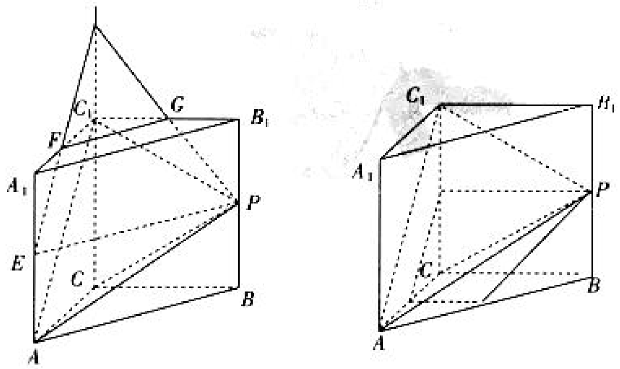
（或设 $a_1=a=\sin^2\alpha,\alpha\in[0,\frac{\pi}{2}]$，通过三角函数求解）

13. 6　本题考查线性规划. 作不等式组所表达的可行域(图略)，结合目标函数的几何意义可得函数在点(2,2)处取得最大值，$z_{\max}=6$.

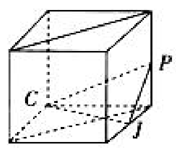
14. $\frac{2}{3}$　本题考查正弦型曲线的图象与性质. 由题意知 $(2\pi)^2+(\frac{T}{2})^2=(\frac{5\pi}{2})^2$，解得 $T=3\pi,\omega=\frac{2}{3}$.

15. $\sqrt{2}$　本题考查双曲线的几何性质. 设渐近线方程为 $y=\frac{b}{a}x$，则点 A 到渐近线的距离 $d=\frac{ab}{c}$，又 $\angle MAN=120^\circ$，$|AM|=|AN|=c$，则 $\frac{ab}{c}=\frac{c}{2}$，即有 $2ab=c^2=a^2+b^2$，所以 $a=b,e=\sqrt{2}$.

16. ①③④　本题考查点、线、面的位置关系. 如图，取 E,F,G 分别为对应边中点，易知四边形 $PEFG$ 是等腰梯形，当 E 不是 AA_1 中点时，PE 不平行平面 $A_1B_1C_1$，则四边形不是梯形，等腰梯形有且仅有一个，$S_{PEFG}=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2}+2\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. 向下作截面满足题意的梯形是直角梯形，同理，直角梯形有且仅有一个，面积 $S=\frac{1}{2}\times(1+2)\times\sqrt{2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$，所以①正确，②不正确.



将三棱柱补成正方体，J 为对应边中点，易知 $\angle CPJ$ 为异面直线所成角或补角，$CP=CJ=\sqrt{5}$，$PJ=\sqrt{2}$，所以 $\cos\angle CPJ=\frac{\sqrt{10}}{10}$，③正确.



$V_{P-C_1CA}=\frac{1}{3}S_{\triangle C_1CA}\times 2=\frac{4}{3}$，$V_{ABC-A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}\times2\times2\times2=4$，所以④正确.

17. 解：本题考查解三角形.

(1)由题意及正弦定理得 $\sin C(1+\cos A)=\sqrt{3}\sin A\sin C$，

即$\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$，$2\sin(A-\frac{\pi}{6})=1$，

因为$A\in(0,\pi)$，所以$A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，$A=\frac{\pi}{3}$. …………………………………………………………… 6分

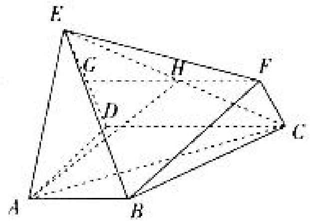
(2)因为$a=2\sqrt{3}$，$A=\frac{\pi}{3}$，所以$\frac{a}{\sin A}=4$，$\triangle ABC$的外接圆半径$R=2$，

且圆心O到BC的距离$OD=1$，因为$\sqrt{5}=\sqrt{1^2+2^2}$，所以$AO\perp OD$，

$\sin\angle ODA=\frac{2}{\sqrt{5}}=\cos\angle CDA$，所以$b^2=5+3-2\times\sqrt{5}\times\sqrt{3}\times\frac{2}{\sqrt{5}}=8-4\sqrt{3}$，

$b=2\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$. …………………………………………………………………………… 12分

18. 解：本题考查线面平行关系与线面角.

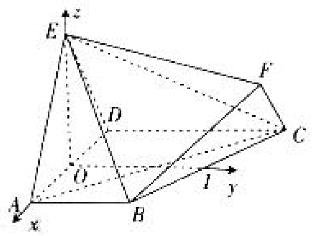


(1)取DE中点G，连接FG交CE于点H，连接AH.
$\because CF/\!/DG$，且$DG=CF$，$\therefore$四边形$CDGF$是平行四边形，$\therefore GF/\!/DC$，H为GF中点，又$\because AB/\!/CD$，且$CD=2AB$，$\therefore AB/\!/HF$，且$AB=HF$，$\therefore$四边形$ABFH$是平行四边形，$\therefore BF/\!/AH$，$BF\not\subset$平面ACE，$AH\subset$平面ACE，
$\therefore BF/\!/$平面ACE. ………………………………………………………… 6分
(2)取AD中点O，BC中点I，连接OE，OI，易知$OI\perp AD$，

$\because DE=AE$，$\therefore OE\perp AD$，$\because\angle CDE=\angle CDA=\frac{\pi}{2}$，$\therefore CD\perp AD$，$CD\perp DE$，$DE\cap AD=D$，$\therefore CD\perp$平面$ADE$，

$\therefore CD\perp OE$，$\therefore OE\perp$平面$ABCD$.

$\because DE=AE=2\sqrt{5}$，$AD=4$，$\therefore OE=4$， ………………………………………………………… 9分



如图，以O为坐标原点建立空间直角坐标系$O-xyz$，
则$A(2,0,0)$，$C(-2,4,0)$，$E(0,0,4)$，$B(2,2,0)$，$F(-1,4,2)$($\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{CF}$)，
设平面BEF的法向量$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EB}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}x+y-2z=0\\ x-4y+2z=0\end{cases}$.
取$\boldsymbol{n}=(6,4,5)$，$\overrightarrow{AC}=(-4,4,0)$，设直线$AC$与平面$BEF$所成角为$\theta$，
$\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AC}|}=-\frac{\sqrt{154}}{77}$，即$\sin\theta=\frac{\sqrt{154}}{77}$， ……………………… 11分

即直线AC与平面BEF所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{154}}{77}$. ………………………………………………………… 12分

19. 解：本题考查抛物线的定义及直线与抛物线的位置关系.

(1)由题意得$\begin{cases}t+\frac{p}{2}=2\times\frac{p}{2}\\ 4=2pt\end{cases}$，解得$\begin{cases}p=2\\ t=1\end{cases}$，

所以C的标准方程为$y^2=4x$. …………………………………………………………………………… 4分

(2)设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，且$x_1+x_2=8$.

设AB中点为$D(m,n)$，则$m=\frac{x_1+x_2}{2}=4$，$n=\frac{y_1+y_2}{2}$，

当$x_1=x_2$时，$l_{AB}:x=4$，$|AB|=8$； …………………………………………………………………… 6分

当$x_1\neq x_2$时，$k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4(y_2-y_1)}{y_2^2-y_1^2}=\frac{4}{y_2+y_1}=\frac{2}{n}$，

则$l_{AB}:y-n=\frac{2}{n}(x-4)$，即$x=\frac{n}{2}(y-n)+4$，

与C联立方程消去x，整理得$y^2-2ny+2n^2-16=0$，由$\Delta>0$，得$n^2<16$，
$y_1+y_2=2n$，$y_1y_2=2n^2-16$，

$|AB|=\sqrt{1+(\frac{n}{2})^2}|y_1-y_2|=\sqrt{(n^2+4)(16-n^2)}\leqslant\frac{n^2+4+16-n^2}{2}=10$，

当$n^2=6$时取"="，所以$|AB|$的最大值为10， ……………………………………………………… 11分

此时AB的方程为$2x\pm\sqrt{6}y-2=0$. ………………………………………………………………… 12分

20. 解：本题考查计数原理与概率.

(1) 第一次训练选择“弧线”，且第三次训练的是“弧线”的概率为 $\frac{1}{5}\times1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$.

第一次训练未选择“弧线”，且第三次训练的是“弧线”的概率为 $\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{20}$，

所以第三次训练的是“弧线”的概率为 $\frac{1}{20}+\frac{3}{20}=\frac{1}{5}$. …………………………………………………………… 4 分

(2) 由题意知“旋转”项最多训练 2 次，所以 X 的不同取值为 1, 2.

1	2	3	4	5

(后五次训练次序列表)

①后五次训练中未练“旋转”，另四项中有一项训练了 2 次，

四项中选一项练 2 次，可放 (1,3), (1,4), (1,5), (2,4), (2,5), (3,5)，计有 $6C_4^1A_3^3=144$ 种.

②“旋转”项练了 2 次：

“旋转项”可在 2, 3, 4, 5 位置，故有 $C_4^1A_4^4=96$ 种.

所以分布列为

X	1	2
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

$E(X)=\frac{7}{5}$. ……………………………………………………………………………………… 8 分

(3) 由题意，P_i 表示第 i 次训练的是“力量”的概率，则第 i 次训练的不是“力量”的概率为 $1-P_i$，则 $P_1=1$，

$P_{i+1}=\frac{1}{4}(1-P_i)$，$i\in\mathbf{N}^*$，即 $P_{i+1}-\frac{1}{5}=-\frac{1}{4}(P_i-\frac{1}{5})$.

数列 $\{P_i-\frac{1}{5}\}$ 是首项为 $P_1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$，公比为 $-\frac{1}{4}$ 的等比数列，

所以 $P_i-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}(-\frac{1}{4})^{i-1}$，即 $P_i=\frac{4}{5}(-\frac{1}{4})^{i-1}+\frac{1}{5}$，$i\in\mathbf{N}^*$，

$P_6=\frac{4}{5}(-\frac{1}{4})^{6-1}+\frac{1}{5}=\frac{51}{256}$. ………………………………………………………………… 12 分

21. 解：本题考查导数的综合应用.

(1) $g(x)=xe^x-ae^{2x}$，$g'(x)=e^x(1+x-2ae^x)$，

设 $h(x)=1-x-e^x$，$h'(x)=1-e^x$，当 $x<0$ 时，$h'(x)>0$，当 $x>0$ 时，$h'(x)<0$.

函数 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上递增，在 $(0,+\infty)$ 上递减，所以 $h(x)\leqslant h(0)=0$.

当 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 时，$1+x-2ae^x\leqslant1-x-e^x\leqslant0$.

$g'(x)\leqslant0$ 恒成立，函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减. …………………………………………… 5 分

(2) $f'(x)=\ln x+1-2ax$，函数 $f(x)$ 存在两个不同的极值点 x_1，x_2，

令 $f'(x)=0$，则 $2a=\frac{\ln x+1}{x}$，设 $k(x)=\frac{\ln x+1}{x}$，$k'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$，

当 $0<x<1$ 时，$k'(x)>0$，当 $x>1$ 时，$k'(x)<0$.

所以函数 $k(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增，在 $(1,+\infty)$ 上递减，且 $x\to+\infty$ 时，$k(x)\to0$，

$k(1)=1$，$k(\frac{1}{e})=0$，所以 $0<2a<1$. ………………………………………………………………… 7 分

$\ln x_2+1=2ax_2$，$a=\frac{\ln x_2+1}{2x_2}$，$f(x_2)>0$，即 $x_2\ln x_2-ax_2^2>0$，$\ln x_2>ax_2=\frac{\ln x_2+1}{2}$，所以 $\ln x_2>1$，$x_2>e$.

……… 9 分

$\frac{f(x_2)}{a(x_2-e)}=\frac{x_2\ln x_2-ax_2^2}{a(x_2-e)}=\frac{x_2(\ln x_2-1)}{2a(x_2-e)}>\frac{x_2(\ln x_2-1)}{x_2-e}$，

设 $\varphi(x)=x\ln x-2x+e$，当 $x>e$ 时，$\varphi'(x)=\ln x-1>0$，所以函数 $\varphi(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上递增，

则 $x>e$ 时，$\varphi(x)>\varphi(e)=0$，即 $x\ln x-x>x-e(x>e)$，

所以 $\dfrac{f(x_2)}{a(x_2-e)}>1$. ………………………………………………………… 12 分

22. 解：本题考查极坐标与参数方程.

(1)由 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$，得 $\rho\cos\theta=3$，即 $x=3$，代入 C 中，

得 $t^2=1$，即 $\begin{cases}x=3\\y=3\end{cases}$，所以交点的极坐标为 $(3\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4})$. ………………………………… 4 分

(2)将 $\rho\sin(\alpha-\theta)=2\sqrt{3}\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{6})$ 展开，代入 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$，

得 $\sin\alpha(x-3)=\cos\alpha(y-\sqrt{3})$，直线过定点 $(3,\sqrt{3})$，

因为 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $l:y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$，将 C 的参数方程代入，

因为 $2t^4+1=\sqrt{3}t^2$ 无解，所以 l 与 C 没有交点.

设 $M(a,b)$，$d=\dfrac{|\sqrt{3}a-b-2\sqrt{3}|}{2}=\dfrac{|\sqrt{3}t^2-2t^4-1|}{2}$，

所以当 $t^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ 时，$d_{\min}=\dfrac{5}{16}$. ………………………………………………… 10 分

23. 解：本题考查不等式的证明.

(1)因为 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)\leqslant 3(a^2+b^2+c^2)=9$，

所以 $|a+b+c|\leqslant 3$，当且仅当 $a=b=c=\pm 1$ 时取"=". ………………………………… 5 分

(2) $\dfrac{a^4}{b^2+c^2}+\dfrac{b^2+c^2}{4}\geqslant a^2$，当且仅当 $2a^2=b^2+c^2$ 时取"="，

同理可得 $\dfrac{b^4}{a^2+c^2}+\dfrac{a^2+c^2}{4}\geqslant b^2$，当且仅当 $2b^2=a^2+c^2$ 时取"="，

$\dfrac{c^4}{b^2+a^2}+\dfrac{b^2+a^2}{4}\geqslant c^2$，当且仅当 $2c^2=a^2+b^2$ 时取"="，

所以 $\dfrac{a^4}{b^2+c^2}+\dfrac{b^4}{a^2+c^2}+\dfrac{c^4}{a^2+b^2}\geqslant\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}=\dfrac{3}{2}$，当且仅当 $a^2=b^2=c^2=1$ 时取"=". ………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 ‘’ 专业、专注、有态度 ‘’ 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。