2021届高三卫冕联考

理数参考答案及评分细则

一、选择题

1. B 【解析】由 $x^2-4x<0$，得 $0<x<4$，因为 $A=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，所以 $A\cap B=\{1,2,3\}$. 故选 B.

2. C 【解析】因为 $z=\frac{1-i^3}{1+2i}=\frac{1+i}{1+2i}=\frac{(1+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}i$，虚部为 $-\frac{1}{5}$. 故选 C.

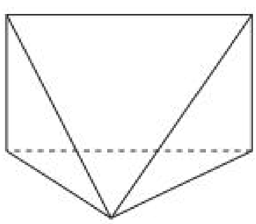
3. C 【解析】因为 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(2\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2)\cdot(4\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)=8\boldsymbol{e}_1^{\ 2}+14\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2-4\boldsymbol{e}_2^{\ 2}=8+14\times1\times1\times\frac{1}{2}-4=11$. 故选 C.

4. B 【解析】方程 $x^2+y^2+2x+4y+a=0$，即 $(x+1)^2+(y+2)^2=5-a$ 表示圆，则需 $5-a>0$，解得 $a<5$，所以“$a<8$”是“$a<5$”的必要不充分条件. 故选 B.

5. A 【解析】首先 $0<a<1$，$0<b<1$，因为 $a=\frac{\lg 3}{\lg 4}$，$b=\frac{\lg 3}{\lg 5}$，所以 $a-b=\frac{\lg 3}{\lg 4}-\frac{\lg 3}{\lg 5}=\frac{\lg 3(\lg 5-\lg 4)}{\lg 4\cdot\lg 5}>0$，所以 $0<b<a<1$，因为 $c=\log_4 5>1$，所以 $b<a<c$. 故选 A.

6. D 【解析】由题意知 $\tan\theta_1=2$，$\tan\theta_2=3$，所以 $\tan(\theta_1-\theta_2)=\frac{2-3}{1+2\times3}=-\frac{1}{7}$. 故选 D.

7. C 【解析】由三视图可知该几何体为如图所示的四棱锥，所以该几何体的表面积为 $\frac{1}{2}\times4\times3\sqrt{2}\times2+6\times4+\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times3\sqrt{2}+\frac{1}{2}\times6\times5=48+12\sqrt{2}$. 故选 C.



8. B 【解析】设 $M(m,n)$，$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，不妨设点 M 在第一象限，由题意可知点 M 在直线 $y=\frac{b}{a}x$ 上，因为 $|MF_2|=|F_1F_2|$，$\angle F_1F_2M=120°$，所以 $m=2c$，$n=\sqrt{3}c$，将 $M(2c,\sqrt{3}c)$ 代入 $y=\frac{b}{a}x$ 得 $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以双曲线 C 的离心率 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$. 故选 B.

9. C 【解析】设该校男老师的人数为 x，女老师的人数为 y，则可得如下表格：

	方案一	方案二	
男老师	$0.5x$	$0.5x$	x
女老师	$0.25y$	$0.75y$	y
	$0.5x+0.25y$	$0.5x+0.75y$	$x+y$

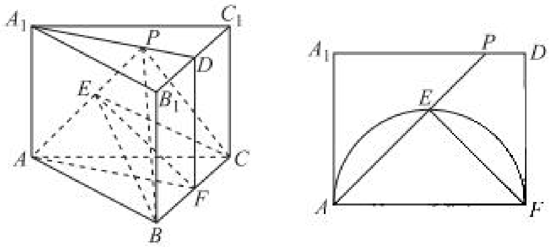
由题意 $\frac{0.25y}{0.5x+0.25y}=0.4$，可得 $\frac{y}{x}=\frac{4}{3}$，可得 $x=30$，$y=40$，则 $K^2=\frac{70(15\times30-15\times10)^2}{25\times45\times30\times40}\approx4.667>3.841$，但 $4.667<5.024$，所以无 97.5%以上有 95%以上的把握认为“选择方案与性别有关”. 故选 C.

10. D 【解析】$f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+\sin^2 x-\cos^2 x=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，令 $x=\frac{5}{12}\pi$，则 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi$，故 $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\sqrt{3}\neq0$，故 A 项错误，当 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$，$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\in[1,2]$，故 B 项错误，因为 $f(x)$ 的周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，所以若 $f(x_1)=f(x_2)=2$，则 $x_1-x_2=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，故 C 项错误，将 $f(x)$ 的图象向右平移

$\frac{\pi}{6}$个单位得 $g(x)=f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-2\cos 2x$ 的图象，故 D 项正确. 故选 D.

11. B 【解析】因为 $f(x+3)$是偶函数，所以 $f(x)$的图象关于直线 $x=3$ 对称，则 $f(5)=f(1)=4$，因为任意 $x_1,x_2\in[3,+\infty)$满足 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，所以 $f(x)$在$[3,+\infty)$上单调递增，在$(-\infty,3)$上单调递减，故$f(3x-1)<4$ 等价于 $1<3x-1<5$，解得 $\frac{2}{3}<x<2$. 故选 B.

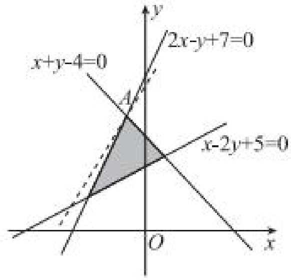
12. A 【解析】如图所示，



因为正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 $6\sqrt{3}$，$AB=2\sqrt{3}$，所以$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{3})^2\times AA_1=6\sqrt{3}$，即 $AA_1=2$，因为 $V_{P-ABC}=\frac{1}{3}\times2\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{3})^2=2\sqrt{3}=V_{P-BCE}+V_{A-BCE}$，所以要使三棱锥 $P-BCE$ 的体积最小，则三棱锥 $E-ABC$ 的体积最大，设 BC 的中点为 F，作出截面如图所示，因为 $AP\perp\alpha$，所以 $AE\perp EF$，所以点 E 在以 AF 为直径的圆上，所以点 E 到底面 ABC 距离的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}\times2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，所以三棱锥 $P-BCE$的体积的最小值为 $2\sqrt{3}-\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{3})^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 A.

二、填空题

13. $\frac{5}{3}$ 【解析】$z=\frac{y}{x+4}$表示可行域内的点和$(-4,0)$连线的斜率，作出不等式组表示的可行域，如图所示，



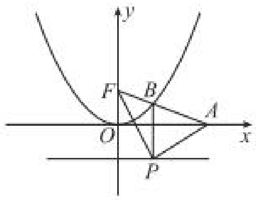
由$\begin{cases}x+y=4\\2x-y+7=0\end{cases}$，得 $A(-1,5)$，$z_{\max}=\frac{5}{-1+4}=\frac{5}{3}$.

14. -561 【解析】由二项式定理可知$\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-1\right)^7$展开式中含$\frac{1}{x^2}$的项的系数为 $C_7^3\times2^4\times(-1)^3=-560$，所以展开式中的常数项为 $-560+C_7^7(-1)^7=-561$.

15. $\frac{\pi}{3}$ 【解析】因为$(2\tan B+\tan A)\sin A=2\tan B\tan A$，所以 $\frac{2\sin B}{\cos B}+\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{2\sin B}{\cos A\cos B}$，即 $2\cos A\sin B+\cos B\sin A=2\sin B$，即 $\cos A\sin B+\sin C=2\sin B$. 由 $2c=3b$，及正弦定理得 $2\sin C=3\sin B$，即 $\sin B=\frac{2}{3}\sin C$，所以 $\cos A\times\frac{2}{3}\sin C+\sin C=\frac{4}{3}\sin C$，得 $\cos A=\frac{1}{2}$，又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

16. 6 【解析】由抛物线 $x^2=8y$ 的方程可得焦点为 $F(0,2)$，准线方程为 $y=-2$，设 $P(m,-2)$，则 $k_{PF}=-\frac{4}{m}$，因为 $PF\perp PA$，所以 $k_{PA}=\frac{m}{4}$，直线 PA：$y+2=\frac{m}{4}(x-m)$，令 $y=0$，得 $A\left(\frac{8}{m}+m,0\right)$，由$\frac{8}{m}+m>0$ 得 $m>0$，设 $B\left(m,\frac{m^2}{8}\right)$，由 F,A,B 三点共线得

$\dfrac{\frac{m^2}{8}-2}{m}=\dfrac{-2}{\frac{8}{m}+m}$，整理得 $m^4+8m^2-128=0$，解得 $m=2\sqrt{2}$，所以 $A(4\sqrt{2},0)$，所以 $|FA|=\sqrt{2^2+(4\sqrt{2})^2}=6$.



三、解答题

17. **解**：(1)因为 $S_n=4n^2+kn$，

所以 $S_1=4+k$，$S_2=16+2k$，

因为 $a_2=20$，

所以 $16+2k-(4+k)=20$，解得 $k=8$. （3 分）

所以 $S_1=12$，$S_n=4n^2+8n$，

因为当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}=4(n-1)^2+8(n-1)$，

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=4n^2+8n-4(n-1)^2-8(n-1)=8n+4$.

$n=1$ 时上式成立，所以 $a_n=8n+4$. （6 分）

(2)因为 $a_{n-1}=8n-4$，$b_n-b_{n-1}=8n-4(n\geqslant 2)$，

所以 $b_2-b_1=12$，

$b_3-b_2=20$，

$b_4-b_3=28$，

…，

$b_n-b_{n-1}=8n-4$，

所以 $b_n-b_1=12+20+28+\cdots+8n-4$

$=\dfrac{(n-1)(12+8n-4)}{2}=4n^2-4$，

即 $b_n=4n^2-1$，$(n\geqslant 2)$，

当 $n=1$ 时，$b_1=3$ 符合上式，所以 $b_n=4n^2-1$.

（9 分）

所以 $\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{4n^2-1}=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$，

所以 $T_n=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{n}{2n+1}$. （12 分）

18. **解**：(1)取 AA_1 的中点 F，连接 DF，EF，

因为 $DF/\!/AC$，$DF\not\subset$ 平面 ACB_1，$AC\subset$ 平面 ACB_1，

所以 $DF/\!/$平面 ACB_1，

因为 $EF/\!/AB_1$，$EF\not\subset$ 平面 ACB_1，$AB_1\subset$ 平面 ACB_1，

所以 $EF/\!/$平面 ACB_1，又因为 $EF\cap DF=F$，

所以平面 $DEF/\!/$平面 ACB_1，

因为 $DE\subset$ 平面 DEF，

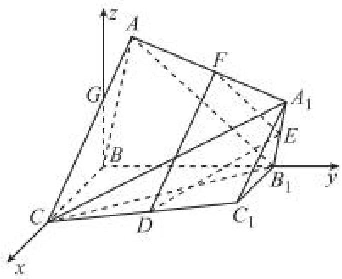
所以 $DE/\!/$平面 AB_1C. （5 分）

(2)因为 $AB\perp BB_1$，$BC\perp BB_1$，$AB\cap BC=B$，

所以 $BB_1\perp$平面 ABC，

在平面 ABC 内过 B 点作 $BG\perp BC$ 交 AC 于 G，

则 BC，BB_1，BG 两两垂直，以 B 为原点，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BB_1}$，$\overrightarrow{BG}$的方向为 x，y，z 轴的正方向建立空间直角坐标系，



不妨设 $BC=2$，则 $B(0,0,0)$，$B_1(0,2,0)$，$C(2,0,0)$，$A(-1,0,\sqrt{3})$，$A_1\left(-\dfrac{1}{2},2,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$， （6 分）

设平面 AB_1C 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

因为$\overrightarrow{CA}=(-3,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{B_1C}=(2,-2,0)$，

所以由$\begin{cases}\overrightarrow{CA}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{B_1C}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}-3x_1+\sqrt{3}z_1=0,\\ 2x_1-2y_1=0,\end{cases}$

取 $y_1=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,1,\sqrt{3})$．　　(8 分)

设平面 A_1B_1C 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$，

因为 $\overrightarrow{B_1C}=(2,-2,0)$，$\overrightarrow{B_1A_1}=\left(-\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

所以由 $\begin{cases}\overrightarrow{B_1A_1}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{B_1C}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-x_2+\sqrt{3}z_2=0,\\ 2x_2-2y_2=0,\end{cases}$

取 $x_2=\sqrt{3}$，得 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},\sqrt{3},1)$．　　(10 分)

设平面 AB_1C 和平面 A_1B_1C 所成锐二面角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}\times\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{105}}{35}$．　　(12 分)

19. **解**：(1)由题意知，

$\bar{x}=125\times0.05+175\times0.1+225\times0.15+275\times0.4+325\times0.25+375\times0.05=267.5$．　　(3 分)

(2)(ⅰ)一个零件为 A 级的概率为 $1-0.05\times2=0.9$，

ξ 可能取的值为 0，1，2，3，相应的概率为：

$P(\xi=0)=C_3^0(1-0.9)^3=0.001$，

$P(\xi=1)=C_3^1\times0.9\times(1-0.9)^2=0.027$，

$P(\xi=2)=C_3^2\times0.9^2\times(1-0.9)=0.243$，

$P(\xi=3)=C_3^3\times0.9^3=0.729$，

随机变量 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	0.001	0.027	0.243	0.729

因为 $\xi\sim B(3,0.9)$，

所以期望 $E(\xi)=3\times0.9=2.7$．　　(7 分)

(ⅱ)设每箱零件中 A 级零件有 X 个，每箱零件的利润为 Y 元，则 B 级零件有 $400-X$ 个，

由题意知 $Y=12X+4(400-X)=8X+1\,600$，

因为 $X\sim B(400,0.9)$，

所以 $E(X)=400\times0.9=360$，

所以 $E(Y)=E(8X+1\,600)=8E(X)+1\,600=8\times360+1\,600=4\,480$(元)．　　(12 分)

20. **解**：(1)设 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，

由题意知 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\frac{1}{2}\times2c\times2=2\sqrt{6}$，

解得 $c=\sqrt{6}$，

所以 $a=2\sqrt{2}$，$b=\sqrt{8-6}=\sqrt{2}$，

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$．　　(4 分)

(2)(ⅰ)当直线 l 的斜率为 0 时，则 $k_1\cdot k_2=\frac{2}{4-2\sqrt{2}}\times\frac{2}{4+2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$；　　(5 分)

(ⅱ)当直线 l 的斜率不为 0 时，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 l 的方程为 $x=my+2$，

由 $\begin{cases}x^2+4y^2=8\\ x=my+2\end{cases}$，整理得 $(m^2+4)y^2+4my-4=0$，

$\Delta>0\Rightarrow m\in\mathbf{R}$，

则 $y_1+y_2=\frac{-4m}{m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-4}{m^2+4}$．　　(7 分)

又 $x_1=my_1+2$，$x_2=my_2+2$，

所以 $k_1\cdot k_2=\frac{2-y_1}{4-x_1}\cdot\frac{2-y_2}{4-x_2}=\frac{(2-y_1)(2-y_2)}{(2-my_1)(2-my_2)}$

$=\frac{4-2(y_1+y_2)+y_1y_2}{4-2m(y_1+y_2)+m^2y_1y_2}$

$=\frac{4-2\times\left(\frac{-4m}{m^2+4}\right)+\left(\frac{-4}{m^2+4}\right)}{4-2m\cdot\left(\frac{-4m}{m^2+4}\right)+m^2\cdot\left(\frac{-4}{m^2+4}\right)}$

$=\frac{m^2+2m+3}{2m^2+4}=\frac{1}{2}+\frac{2m+1}{2m^2+4}$，　　(10 分)

令 $t=2m+1$，当 $t=0$ 时，$k_1\cdot k_2=\frac{1}{2}$．

当 $t\neq0$ 时，则 $k_1\cdot k_2=\frac{1}{2}+\frac{2t}{t^2-2t+9}=\frac{1}{2}+$

$\dfrac{2}{t+\dfrac{9}{t}-2}\leqslant 1$，

当且仅当 $t=3$，即 $m=1$ 时，取等号，

所以所求直线 l 的方程为 $x-y-2=0$.　　(12 分)

21. **解**：(1)因为 $f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $x-2y=0$ 平行，

所以 $f'(1)=\dfrac{1}{2}$，

因为 $f'(x)=\dfrac{1}{x+m}+(x-1)e^{-x}$，

所以 $f'(1)=\dfrac{1}{1+m}=\dfrac{1}{2}$，解得 $m=1$.　　(3 分)

(2)由(1)得当 $m=1$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}+(x-1)e^{-x}$

$=\dfrac{e^x+x^2-1}{(x+1)e^x}$，

当 $x>0$ 时，因为 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $f(0)=0$，所以 $f(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.　　(7 分)

(3)由(2)可知当 $m>1$ 且 $x>0$ 时，$f(x)>\ln(x+1)-xe^{-x}>0$，

即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上没有零点，

当 $x\in(-m,0)$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{x+m}+(x-1)e^{-x}=\dfrac{e^x+x^2+(m-1)x-m}{(x+m)e^x}$，　　(8 分)

令 $g(x)=e^x+x^2+(m-1)x-m$，$x\in(-m,0)$，

则 $g'(x)=e^x+2x+m-1$ 单调递增，

且 $g'(-m)=e^{-m}-2m+m-1=e^{-m}-m-1<0$，$g'(0)=m>0$，

所以 $g'(x)$ 在 $(-m,0)$ 上存在唯一零点，记为 x_0，

且 $x\in(-m,x_0)$，$g'(x)<0$，$x\in(x_0,0)$，$g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(-m,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,0)$ 上单调递增，

因为 $m>1$，所以 $g(-m)=e^{-m}>0$，$g(0)=1-m<0$，

因为 $g(x_0)<g(0)$，

所以 $g(x_0)<0$，

所以 $g(x)$ 在 $(-m,x_0)$ 上存在唯一零点 x_1，且在 $(x_0,0)$ 上恒小于零，

故 $x\in(-m,x_1)$，$g(x)>0$；

$x\in(x_1,0)$，$g(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-m,x_1)$ 上单调递增，在 $(x_1,0)$ 上单调递减，由 $f(0)=\ln m>0$，得 $f(x_1)>0$，

故 $f(x)$ 在 $(x_1,0)$ 无零点，所以 $f(x)$ 在 $(-m,0)$ 上至多有一个零点，　　(10 分)

令 $y=xe^{-x}$，$x\in(-m,0)$，

则 $y'=(1-x)e^{-x}>0$，

所以 $y=xe^{-x}$，$x\in(-m,0)$ 单调递增，

所以 $y=xe^{-x}>-me^m$，

所以当 $x\in(-m,0)$ 时，$f(x)=\ln(x+m)-xe^{-x}<\ln(x+m)+me^m$，

取 $x_2=-m+e^{-me^m}\in(-m,0)$，

则有 $f(x_2)<\ln(x_2+m)+me^m=0$，

所以由零点存在定理可知 $f(x)$ 在 $(-m,0)$ 上只有一个零点，

所以 $f(x)$ 在 $(-m,+\infty)$ 上只有一个零点.　(12 分)

22. **解**：(1)由曲线 C 的参数方程，

得 $x^2+(y-1)^2=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$，

因为 $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$，

所以曲线 C 的普通方程为 $x^2+(y-1)^2=2$.　(3 分)

由 $\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$，得 $\rho\sin\theta+\rho\cos\theta=2$.

因为 $\rho\cos\theta=x$，$\rho\sin\theta=y$，

所以直线 l 的直角坐标方程为 $x+y-2=0$.　(5 分)

(2)设直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=3-\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数,$t\in\mathbf{R}$),

将直线 l 的参数方程代入曲线 C 的普通方程,

整理得 $t^2-5\sqrt{2}t+11=0,\Delta>0$,

设点 A,B 对应的参数分别为 t_1,t_2,

所以 $t_1+t_2=5\sqrt{2},t_1t_2=11$,则 t_1,t_2 同正.

所以 $\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=\frac{1}{|t_1|}+\frac{1}{|t_2|}=\frac{t_1+t_2}{t_1t_2}=\frac{5\sqrt{2}}{11}$.

(10 分)

23.**解**:(1)当 $x<-7$ 时,由 $-3x-9\geqslant 8$,得 $x\leqslant -\frac{17}{3}$,

所以 $x<-7$,

当 $-7\leqslant x<-1$ 时,由 $5-x\geqslant 8$,得 $x\leqslant -3$,

所以 $-7\leqslant x\leqslant -3$,

当 $x\geqslant -1$ 时,由 $3x+9\geqslant 8$,得 $x\geqslant -\frac{1}{3}$,

所以 $x\geqslant -\frac{1}{3}$,

故不等式 $f(x)\geqslant 8$ 的解集为 $(-\infty,-3]\cup\left[-\frac{1}{3},+\infty\right)$. (5 分)

(2)由(1)得,$f(x)=\begin{cases} -3x-9, x<-7 \\ 5-x, -7\leqslant x<-1, \\ 3x+9, x\geqslant -1 \end{cases}$

所以当 $x=-1$ 时,$m=f(x)_{\min}=6,a+b+c=6$.

方法一:

若证原式成立,

即证 $(\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1})^2\leqslant 81$,

整理得 $2\sqrt{4a+1}\cdot\sqrt{4b+1}+2\sqrt{4a+1}\cdot\sqrt{4c+1}+2\sqrt{4b+1}\cdot\sqrt{4c+1}\leqslant 54$,

因为 $4a+1+4b+1\geqslant 2\sqrt{4a+1}\cdot\sqrt{4b+1}$,

$4a+1+4c+1\geqslant 2\sqrt{4a+1}\cdot\sqrt{4c+1}$,

$4b+1+4c+1\geqslant 2\sqrt{4b+1}\cdot\sqrt{4c+1}$,

上式相加,得 $8(a+b+c)+6\geqslant 2\sqrt{4a+1}\cdot\sqrt{4b+1}+2\sqrt{4a+1}\cdot\sqrt{4c+1}+2\sqrt{4b+1}\cdot\sqrt{4c+1}$,

即 $54\geqslant 2\sqrt{4a+1}\cdot\sqrt{4b+1}+2\sqrt{4a+1}\cdot\sqrt{4c+1}+2\sqrt{4b+1}\cdot\sqrt{4c+1}$.

当且仅当 $a=b=c$ 时,取等号.

所以 $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\leqslant 9$. (10 分)

方法二:

因为 $a+b+c=6$,

所以 $4a+1+4b+1+4c+1=27$. (7 分)

由柯西不等式可得 $[(4a+1)+(4b+1)+(4c+1)]\cdot(1^2+1^2+1^2)\geqslant(\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1})^2$,

所以 $(\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1})^2\leqslant 27\times 3$,

所以 $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\leqslant 9$,当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立. (10 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》