"皖南八校"2021届高三第一次联考

数 学(理科)

考生注意：

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。第Ⅰ卷每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；第Ⅱ卷请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
3. 本卷命题范围：集合与常用逻辑用语，函数、导数及其应用(含定积分)，三角函数、解三角形，平面向量与复数。

第Ⅰ卷(选择题　共60分)

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $M=\{x|x^2-x-2\leqslant 0\}$，$N=\{y|y=\pi^x\}$，则 $M\cap N=$

A. $(0,2]$　　B. $(0,1]$

C. $[-2,+\infty)$　　D. $[-1,+\infty)$

2. 已知复数 z 满足 $z-\bar{z}=2i$，则 z 的虚部是

A. -1　　B. 1　　C. $-i$　　D. i

3. 已知实数 $x>0,y>0$，则"$xy<1$"是"$\log_{\frac{1}{3}}x+\log_{\frac{1}{3}}y>0$"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 若 $\tan\alpha=-2$，则 $\sin(\alpha-\pi)\cdot\cos(\pi+\alpha)=$

A. $\frac{4}{5}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\pm\frac{2}{5}$　　D. $-\frac{2}{5}$

5. 定积分 $\int_{-2}^{2}(\sin x+\sqrt{4-x^2})\mathrm{d}x$ 的值是

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. π　　C. 2π　　D. $\frac{3\pi}{2}$

6. 设向量 $\boldsymbol{a}=(0,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,2)$，则

A. $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$　　B. $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})/\!/\boldsymbol{b}$

C. $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为$\frac{\pi}{3}$　　D. $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$

7. 已知 $a=e^{0.3}$，$b=(\frac{1}{2})^{e}$，$c=\log_5\sqrt{7}$，$d=\sin 4$，则

A. $a>b>c>d$　　B. $a>c>b>d$　　C. $d>b>a>c$　　D. $b>a>d>c$

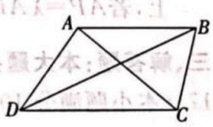
8. 某特种冰箱的食物保鲜时间 y(单位：小时)与设置储存温度 x(单位：℃)近似满足函数关系 $y=3^{kx+b}$(k,b 为常数)，若设置储存温度 0℃的保鲜时间是 288 小时，设置储存温度 5℃的保鲜时间是 144 小时，则设置储存温度 15℃的保鲜时间近似是

A. 36 小时　　B. 48 小时　　C. 60 小时　　D. 72 小时

9. 将函数 $f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{3})$ 的图象横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$(纵坐标不变)，然后向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，所得函数记为 $g(x)$. 若 $x_1,x_2\in(0,\frac{\pi}{2})$，$x_1\neq x_2$，且 $g(x_1)=g(x_2)$，则 $g(x_1+x_2)=$

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

10. 如图，地面四个 5G 中继站 A、B、C、D，已知 $CD=(\sqrt{6}+\sqrt{2})$km，$\angle ADB=\angle CDB=30°$，$\angle DCA=45°$，$\angle ACB=60°$，则 A、B 两个中继站的距离是



A. $4\sqrt{3}$ km　　B. $2\sqrt{10}$ km

C. $\sqrt{10}$ km　　D. $6\sqrt{2}$ km

11. 已知函数 $f(x)=(\frac{3}{2}x^2-3x)\cdot e^x$，则

A. 函数 $f(x)$ 的极大值点为 $x=\sqrt{2}$

B. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\sqrt{2})$ 上单调递减

C. 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有 3 个零点

D. 函数 $f(x)$ 在原点处的切线方程为 $y=-3x$

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x+4|-2, & x<-2,\\ 2f(x-4), & x\geq -2.\end{cases}$ 以下结论正确的个数有

① $f(2020)=2^{507}$；

② 方程 $f(x)=\frac{1}{4}x-1$ 有四个实根；

③ 当 $x\in[6,10)$ 时，$f(x)=8|x-8|-16$；

④ 若函数 $y=f(x)-t$ 在 $(-\infty,10)$ 上有 8 个零点 $x_i(i=1,2,3,\cdots,8)$，则 $\sum_{i=1}^{8}x_if(x_i)$ 的取值范围为 $(-16,0)$.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

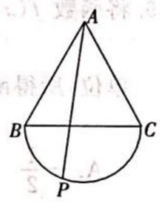
第Ⅱ卷(非选择题　共 90 分)

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在题中的横线上.

13. 设函数 $f(x)$是 $\mathbf{R}$ 内的可导函数，且 $f(\ln x)=x\ln x$，则 $f'(1)=$________.

14. 已知函数 $f(x)=(x^2+\frac{1}{\pi})^{-2}-e^{|\frac{x}{\pi}|}$，则不等式 $f(x-1)<f(2x-1)$的解集是________.

15. 将函数 $f(x)=\cos\omega x(\omega>0)$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度后，得到函数 $y=g(x)$的图象，若函数 $g(x)$在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上是单调递减函数，则实数 ω 的最大值为________.



16. 如图，已知$\triangle ABC$为边长为 2 的等边三角形，动点 P 在以 BC 为直径的半圆上，若$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则 $2\lambda+\mu$ 的最小值为________.

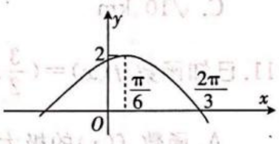
三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$，其中 $A>0,\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2},x\in\mathbf{R}$，其部分图象如图所示.

(1)求函数 $y=f(x)$的解析式；

(2)已知函数 $g(x)=f(x)\cos x$，求函数 $g(x)$的单调递增区间.



18.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{x^2+m}{x}(1\leqslant x\leqslant 4)$，且 $f(1)=5$.

(1)求实数 m 的值，并求函数 $f(x)$的值域；

(2)函数 $g(x)=ax-1(-2\leqslant x\leqslant 2)$，若对任意 $x_1\in[1,4]$，总存在 $x_0\in[-2,2]$，使得 $g(x_0)=f(x_1)$成立，求实数 a 的取值范围.

19.（本小题满分 12 分）

在△ABC 中，角 A、B、C 的对边分别是 a、b、c，且满足 $4\cos^2\frac{A+B}{2}-\cos 2(A+B)=\frac{7}{2}$.

(1)求角 C；

(2)设 D 为边 AB 上的点，CD 平分∠ACB，且 $CD=1$，若△ACD 与△BCD 的面积比 2∶1，求 AC 长.

20.（本小题满分 12 分）

设函数 $f(x)=\frac{1}{a+bx}(a,b>0)$.

(1)若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程是 $bx+4y-3=0$，求实数 a,b 的值；

(2)在(1)的条件下，若 $2(x-k)f(x)\geqslant\ln x$ 对于 $0<x\leqslant1$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

21.（本小题满分 12 分）

某科技公司生产某种芯片.由以往的经验表明，不考虑其他因素，该芯片每日的销售量 y(单位：枚)与销售价格 x(单位：元/枚，$10<x\leqslant50$)：当 $10<x\leqslant30$ 时满足关系式 $y=m(x-30)^2+\frac{n}{x-10}$，($m,n$ 为常数)；当 $30<x\leqslant50$ 时满足关系式 $y=-70x+4900$.已知当销售价格为 20 元/枚时，每日可售出该芯片 7000 枚；当销售价格为 30 元/枚时，每日可售出该芯片 1500 枚.

(1)求 m,n 的值，并确定 y 关于 x 的函数解析式；

(2)若该芯片的成本为 10 元/枚，试确定销售价格 x 的值，使公司每日销售该芯片所获利润 $f(x)$ 最大.(x 精确到 0.01 元/枚)

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=a\cdot e^x-bx-1(a,b\in\mathbf{R},ab\neq0)$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)证明：当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$(\sin x)^{(x+1)^2}-1>(x^2+2x+2)\ln\sin x$.

“皖南八校”2021届高三第一次联考·数学(理科)
参考答案、解析及评分细则

1. A　依题意得 $M=[-1,2]$，$N=(0,+\infty)$，$\therefore M\cap N=(0,2]$.
2. B　设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则 $z-\bar{z}=a+bi-(a-bi)=2bi=2i$，$2b=2$，$b=1$，$\therefore z$ 的虚部是 1.
3. C　因为实数 $x>0$，$y>0$，不等式 $\log_{\frac{1}{3}}x+\log_{\frac{1}{3}}y>0$ 解得 $0<xy<1$，$\therefore$ 实数 $x>0$，$y>0$，则“$xy<1$”是“$\log_{\frac{1}{3}}x+\log_{\frac{1}{3}}y>0$”的充要条件.
4. D　$\sin(\alpha-\pi)\cdot\cos(\pi+\alpha)=-\sin\alpha\cdot(-\cos\alpha)=\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=-\dfrac{2}{5}$.
5. C　$\int_{-2}^{2}(\sin x+\sqrt{4-x^2})\mathrm{d}x=\int_{-2}^{2}\sin x\mathrm{d}x+\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\pi\times2^2=2\pi$.
6. D　因为 $\boldsymbol{a}=(0,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,2)$，所以 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=2\sqrt{2}$，所以 $|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$，故 A 错误；
因为 $\boldsymbol{a}=(0,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,2)$，所以 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-2,0)$，所以 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行，故 B 错误；
又 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{4}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$，故 C 错误；
又 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0-0=0$，故 D 正确.
7. B　$\because e^{0.3}>e^0=1$，$\therefore a>1$，$\because 0<(\dfrac{1}{2})^e<(\dfrac{1}{2})^1=\dfrac{1}{2}$，$\therefore 0<b<\dfrac{1}{2}$，
$\because \log_5\sqrt{7}>\log_5\sqrt{5}=\dfrac{1}{2}$，且 $\log_5\sqrt{7}<\log_5 5=1$，$\therefore \dfrac{1}{2}<c<1$，$d=\sin 4<0$.
$\therefore a>c>b>d$.
8. A　由题意得 $\begin{cases}3^b=288\\3^{5k+b}=144\end{cases}$，$\therefore 3^{5k}=\dfrac{144}{288}=\dfrac{1}{2}$，所以 $x=15$ 时，$y=3^{15k+b}=(3^{5k})^3\cdot3^b=\dfrac{1}{8}\times288=36$.
9. D　将函数 $f(x)=\sin(x-\dfrac{\pi}{3})$ 的图象横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$(纵坐标不变)，可得 $y=\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$ 的图象；
再向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位，所得函数 $g(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$，
若 $x_1,x_2\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$x_1\neq x_2$，则 $2x_1+\dfrac{\pi}{3}\in(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3})$，$2x_2+\dfrac{\pi}{3}\in(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3})$，
$\because g(x_1)=g(x_2)$，$\therefore \dfrac{2x_1+\frac{\pi}{3}+2x_2+\frac{\pi}{3}}{2}=\dfrac{\pi}{2}$，
$\therefore x_1+x_2=\dfrac{\pi}{6}$，则 $g(x_1+x_2)=\sin(2\times\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3})=\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
10. C　由题意可得 $\angle DAC=75°$，$\angle DBC=45°$，
在 $\triangle ADC$ 中，由正弦定理得 $AC=\dfrac{CD\cdot\sin\angle ADC}{\sin\angle DAC}=\dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin 75°}=2\sqrt{3}$，
在 $\triangle BDC$ 中，由正弦定理得 $BC=\dfrac{CD\cdot\sin\angle BDC}{\sin\angle DBC}=\dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{3}+1$，
在 $\triangle ACB$ 中，由余弦定理得 $AB^2=AC^2+BC^2-2\times AC\times BC\cdot\cos\angle ACB=(2\sqrt{3})^2+(\sqrt{3}+1)^2-2\times2\sqrt{3}\times(\sqrt{3}+1)\times\dfrac{1}{2}=10$，所以 $AB=\sqrt{10}$ km.
11. D　令 $f'(x)=0$ 得 $x=\sqrt{2}$ 或 $x=-\sqrt{2}$.
当 $x\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $y=f(x)$ 的增区间为 $(-\infty,-\sqrt{2})$，$(\sqrt{2},+\infty)$；
当 $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ 时，$f'(x)<0$，函数 $y=f(x)$ 的减区间为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. 故 B 错误.
所以当 $x=-\sqrt{2}$ 时，函数 $y=f(x)$ 有极大值，故 A 错误.
当 $x<-\sqrt{2}$ 时，$f(x)=(\dfrac{3}{2}x^2-3x)e^x>0$ 恒成立，所以函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,-\sqrt{2})$ 上没有零点；
当 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ 时，函数 $y=f(x)$ 在 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ 上单调递减，且 $f(0)=0$，存在唯一零点；
当 $x>\sqrt{2}$ 时，函数 $y=f(x)$ 在 $(\sqrt{2},+\infty)$ 上单调递增，且 $f(2)=0$，存在唯一零点.

故函数 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有两个零点，故 C 错误.

函数 $f(x)=(\frac{3}{2}x^2-3x)e^x$，得 $f'(x)=3(\frac{1}{2}x^2-1)e^x$，则 $f'(0)=-3$；

又 $f(0)=0$，从而曲线 $y=f(x)$ 在原点处的切线方程为 $y=-3x$，故 D 正确.

12. B　对①，$f(2020)=2f(2016)=\cdots=2^{505}f(0)=2^{506}f(-4)=-2^{507}$. 故①错误.

对②，画出 $f(x)=\begin{cases}|x+4|-2, x<-2,\\ 2f(x-4), x\geqslant -2.\end{cases}$ 图像知，$f(x)=\frac{1}{4}x-1$ 有四个根. 故②正确.

对③，当 $x\in[6,10)$ 时，$f(x)=2f(x-4)=4f(x-8)=8f(x-12)=8(|x-12+4|-2)=8|x-8|-16$. 故③正确.

对④，画出图像，$y=f(x)-t$ 有 8 个零点，即 $y=f(x)$ 与 $y=t$ 有 8 个交点.

此时 $\sum\limits_{i=1}^{8}x_if(x_i)=t\cdot\sum\limits_{i=1}^{8}x_i=t[(-4)\times2+0\times2+4\times2+8\times2]=16t$. 又 $t\in(-2,0)$.

若函数 $y=f(x)-t$ 在 $(-\infty,10)$ 上有 8 个零点 $x_i(i=1,2,3,\cdots,8)$，则 $\sum\limits_{i=1}^{8}x_if(x_i)$ 的取值范围为 $(-32,0)$，故④错误.

13. $2e$　令 $t=\ln x$，$f(t)=te^t$，所以 $f(x)=xe^x$，$f'(x)=(x+1)e^x$，$f'(1)=2e$.

14. $(0,\frac{2}{3})$　由于 $f(-x)=f(x)$，所以函数为偶函数，且在 $[0,+\infty)$ 上为减函数. 要 $f(x-1)<f(2x-1)$，则需 $|x-1|>|2x-1|$，解得 $x\in(0,\frac{2}{3})$.

15. $\frac{3}{2}$　由题意，将函数 $f(x)=\cos\omega x(\omega>0)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $y=g(x)=\cos(\omega x+\frac{\omega\pi}{6})$ 的图象，若函数 $g(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上是单调递减函数，

$\because x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，$\therefore \omega x+\frac{\omega\pi}{6}\in[\frac{\omega\pi}{6},\frac{2\omega\pi}{3}]$，$\therefore[\frac{\omega\pi}{6},\frac{2\omega\pi}{3}]\subseteq[2k\pi,2k\pi+\pi]$.

$\therefore \frac{2\omega\pi}{3}-\frac{\omega\pi}{6}=\frac{\omega\pi}{2}\leqslant(2k\pi+\pi)-2k\pi=\pi$，$\therefore 0<\omega\leqslant 2$.

$\therefore 0<\frac{\omega\pi}{6}<\frac{2\omega\pi}{3}\leqslant\frac{4\pi}{3}$.

$\therefore k=0$. $\therefore[\frac{\omega\pi}{6},\frac{2\omega\pi}{3}]\subseteq[0,\pi]$.

$\therefore\begin{cases}\frac{\omega\pi}{6}>0\\ \frac{2\omega\pi}{3}\leqslant\pi\end{cases}$，解得 $0<\omega\leqslant\frac{3}{2}$，所以实数 ω 的最大值为 $\frac{3}{2}$.

16. 1　以圆心 O 为坐标原点，分别以 BC、AO 所在直线为 x、y 轴建立平面直角坐标系，设点 $P(\cos\theta,\sin\theta)$，$\theta\in[\pi,2\pi]$，

则由条件得 $\begin{cases}-\lambda+\mu=\cos\theta\\ -\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3}\mu=\sin\theta-\sqrt{3}\end{cases}$，得 $\begin{cases}\lambda=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\\ \mu=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta\end{cases}$，故 $2\lambda+\mu=\frac{3}{2}-\sin(\theta+\frac{\pi}{6})$，$\theta\in[\pi,2\pi]$，最小值为 1.

17. 解：(1) 由函数 $y=f(x)$ 的图象可知，$A=2$，…………………………………… 1 分

$\frac{T}{4}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，故 $T=2\pi$，则 $\omega=1$，…………………………………… 2 分

又当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$\sin(\frac{\pi}{6}+\varphi)=1$，且 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，故 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，…………………… 4 分

所以 $f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$. …………………………………… 5 分

(2) $g(x)=f(x)\cos x=2\sin(x+\frac{\pi}{3})\cos x=2(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x)\cos x=\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin(2x+\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}$. …………………………………… 8 分

令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 得 $-\frac{5\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{12}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

故 $g(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{5\pi}{12}+k\pi,\frac{\pi}{12}+k\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$. …… 10 分

18. 解：(1) ∵ $f(1)=5$，∴ $m=4$. …… 1 分

∴ $f(x)=\frac{x^2+4}{x}=x+\frac{4}{x}$. …… 2 分

∵ $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上递减，在 $[2,4]$ 上递增，

且 $f(2)=4$，$f(1)=f(4)=5$. …… 4 分

∴ $f(x)$ 值域为 $[4,5]$. …… 5 分

(2) 对于任意 $x_1\in[1,4]$，总存在 $x_0\in[-2,2]$，使得 $g(x_0)=f(x_1)$ 成立，

则 $f(x)$ 的值域是 $g(x)$ 值域的子集；…… 7 分

依题意知，$a\neq0$

当 $a>0$ 时，$g(x_0)\in[-2a-1,2a-1]$，∴ $[4,5]\subseteq[-2a-1,2a-1]$.

∴ $\begin{cases}a>0\\-2a-1\leqslant4\\2a-1\geqslant5\end{cases}$. ∴ $a\geqslant3$. …… 9 分

当 $a<0$ 时，$g(x_0)\in[2a-1,-2a-1]$，∴ $[4,5]\subseteq[2a-1,-2a-1]$.

∴ $\begin{cases}a<0\\2a-1\leqslant4\\-2a-1\geqslant5\end{cases}$. ∴ $a\leqslant-3$. …… 11 分

故 $a\geqslant3$ 或 $a\leqslant-3$. …… 12 分

19. 解：(1) 由已知可得 $4\times\frac{1+\cos(A+B)}{2}-\cos 2(\pi-C)=\frac{7}{2}$，…… 2 分

∴ $2-2\cos C-2\cos^2 C+1=\frac{7}{2}$.

∴ $4\cos^2 C+4\cos C+1=0$，∴ $\cos C=-\frac{1}{2}$. …… 4 分

∵ $0<C<\pi$，∴ $C=\frac{2\pi}{3}$. …… 5 分

(2) 由 (1) 知 $C=\frac{2\pi}{3}$，因为 CD 平分 $\angle ACB$，∴ $\angle ACD=\frac{\pi}{3}$，

∵ $S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot CD\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}AD\cdot h$，

$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot CD\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}BD\cdot h$，

由 $S_{\triangle ACD}:S_{BCD}=2:1$，

得 $AC:BC=2:1=AD:BD$. …… 8 分

设 $BC=x$，则 $AC=2x$，分别在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCD$ 中由余弦定理得，

$AD^2=1+4x^2-2x$，$BD^2=1+x^2-x$. …… 10 分

∴ $(1+4x^2-2x)=4(1+x^2-x)$，解得 $x=\frac{3}{2}$.

∴ $AC=2x=3$. …… 12 分

20. 解：(1) ∵ $f'(x)=-\frac{b}{(a+bx)^2}$，∴ $f'(1)=-\frac{b}{(a+b)^2}$. …… 1 分

∴ $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程是 $y-\frac{1}{a+b}=-\frac{b}{(a+b)^2}(x-1)$. …… 2 分

依题意知，$\begin{cases}-\frac{b}{(a+b)^2}=-\frac{b}{4}\\\frac{1}{a+b}+\frac{b}{(a+b)^2}=\frac{3}{4}\end{cases}$，∴ $\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$ 或者 $\begin{cases}a=-7\\b=5\end{cases}$. …… 4 分

∵ $a,b>0$　∴ $a=b=1$. …… 5 分

(2) ∵ $2(x-k)f(x)\geqslant\ln x$，∴ $k\leqslant x-\frac{1}{2}(x+1)\ln x$. …… 7 分

令 $g(x)=x-\frac{1}{2}(x+1)\ln x$，则 $g'(x)=1-\frac{1}{2}(\ln x+\frac{x+1}{x})=\frac{1}{2}(1-\ln x-\frac{1}{x})$，

令 $h(x)=g'(x)=\frac{1}{2}(1-\ln x-\frac{1}{x})$，∴ $h'(x)=\frac{1}{2}(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})=\frac{1-x}{2x^2}$.

当 $x\in(0,1]$ 时，$h'(x)\geqslant0$，$h(x)$ 递增，即 $g'(x)$ 递增. …… 9 分

$\therefore g'(x)\leqslant\frac{1}{2}(1-\ln 1-1)=0$，$\therefore g(x)$在$(0,1]$递减，$\therefore g(x)_{\min}=g(1)=1$. ………………………… 11 分

$\therefore$实数 k 的取值范围为 $k\leqslant 1$. ………………………………………………………………………… 12 分

21. 解：(1)因为 $x=20$ 时，$y=7000$；$x=30$ 时，$y=1500$，所以$\begin{cases}\frac{n}{20}=1500\\100m+\frac{n}{10}=7000\end{cases}$，

解得 $m=40$，$n=30000$，

每日的销售量 $y=\begin{cases}40(x-30)^2+\frac{30000}{x-10}(10<x\leqslant 30)\\-70x+4900(30<x\leqslant 50)\end{cases}$. …………………………………………………… 5 分

(2)由(1)知，当 $10<x\leqslant 30$ 时：每日销售利润

$f(x)=[40(x-30)^2+\frac{30000}{x-10}](x-10)=40(x-30)^2(x-10)+30000=40(x^3-70x^2+1500x-9000)+30000$，$(10<x\leqslant 30)$. ………………………………………………………………………………… 7 分

则 $f'(x)=40(3x^2-140x+1500)=40(x-30)(3x-50)$，

当 $x=\frac{50}{3}$ 或 $x=30$ 时，$f'(x)=0$，当 $x\in(10,\frac{50}{3})$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

当 $x\in(\frac{50}{3},30)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减.

$\therefore x=\frac{50}{3}$是函数 $f(x)$在$(10,30]$上的唯一极大值点，$f(\frac{50}{3})=40\times\frac{32000}{27}+30000$；………………………… 9 分

当 $30<x\leqslant 50$ 时：每日销售利润 $f(x)=(-70x+4900)(x-10)=-70(x^2-80x+700)$，

$f(x)$在 $x=40$ 有最大值，且 $f(40)=63000<f(\frac{50}{3})$. ………………………………………………… 11 分

综上，销售价格 $x=\frac{50}{3}\approx 16.67$ 元/枚时，每日利润最大. ………………………………………… 12 分

22. 解：(1)$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，$f'(x)=ae^x-b$，…………………………………………………… 1 分

当 $a>0,b<0$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增；………………………………………… 2 分

当 $a>0,b>0$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $x>\ln\frac{b}{a}$，令 $f'(x)<0$，得 $x<\ln\frac{b}{a}$.

则 $f(x)$在$(-\infty,\ln\frac{b}{a})$上单调递减，在$(\ln\frac{b}{a},+\infty)$上单调递增； ………………………………… 3 分

当 $a<0,b>0$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递减；………………………………………… 4 分

当 $a<0,b<0$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $x<\ln\frac{b}{a}$，令 $f'(x)<0$，得 $x>\ln\frac{b}{a}$，

则 $f(x)$在$(-\infty,\ln\frac{b}{a})$上单调递增，在$(\ln\frac{b}{a},+\infty)$上单调递减； ………………………………… 5 分

综上，当 $a>0,b<0$ 时，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增；

当 $a>0,b>0$ 时，$f(x)$在$(-\infty,\ln\frac{b}{a})$上单调递减，在$(\ln\frac{b}{a},+\infty)$上单调递增；

当 $a<0,b>0$ 时，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递减；

当 $a<0,b<0$ 时，$f(x)$在$(-\infty,\ln\frac{b}{a})$上单调递增，在$(\ln\frac{b}{a},+\infty)$上单调递减；……………………… 6 分

(2)证明：当 $a=b=1$ 时，$f(x)=e^x-x-1$.

由(1)知，$f(x)_{\min}=f(0)=0$，所以 $f(x)=e^x-x-1\geqslant 0$.

即 $x\leqslant e^x-1$. 当且仅当 $x=0$ 时取等号. ……………………………………………………………… 8 分

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$时，$(x+1)^2>0$，$(x+1)^2\ln\sin x<0$，

则$(x+1)^2\ln\sin x<e^{(x+1)^2\ln\sin x}-1$，

即$(x+1)^2\ln\sin x<(\sin x)^{(x+1)^2}-1$， ………………………………………………………………… 10 分

又$(x^2+2x+2)\ln\sin x<(x+1)^2\ln\sin x$，

所以$(x^2+2x+2)\ln\sin x<(\sin x)^{(x+1)^2}-1$，

即$(\sin x)^{(x+1)^2}-1>(x^2+2x+2)\ln\sin x$. ……………………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》