高三数学考试(文科)

(考试时间:120 分钟　试卷满分:150 分)

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x|x^2-4x-5<0\}$,$B=\{-3,-1,1,3,5\}$,则 $A\cap B=$

A. $\{3\}$　B. $\{3,5\}$　C. $\{1,3\}$　D. $\{1,3,5\}$

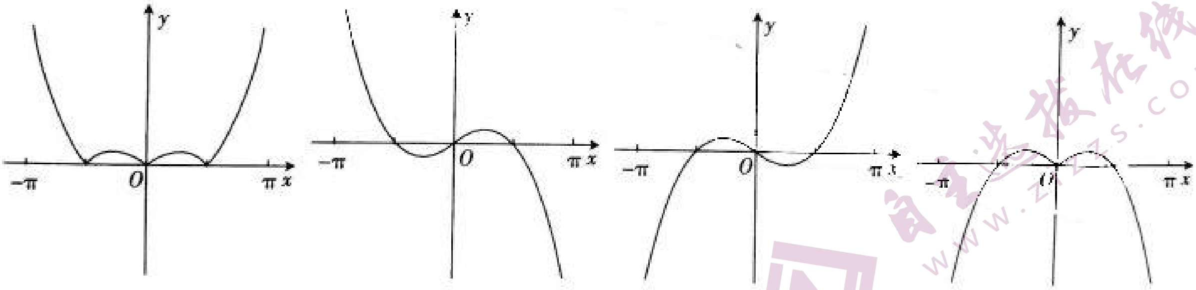
2. 若 $z=2i(-1-2i)-i^5$,则 $|z|=$

A. 5　B. 4　C. 3　D. 2

3. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,且 $a_1+a_2=3$,$2a_1+a_2=4$,则 $S_6=$

A. 128　B. 127　C. 64　D. 63

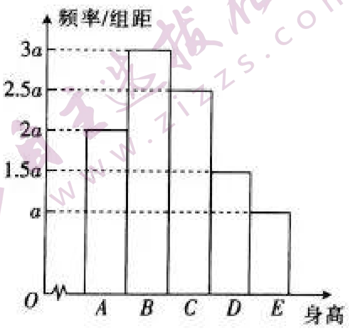
4. 函数 $f(x)=\cos x\cdot\ln\frac{\pi+x}{\pi-x}$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上的图象大致为



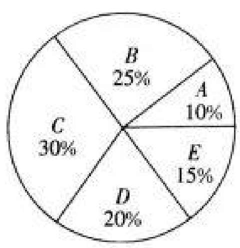
A　B　C　D

5. 某市教育局为得到高三年级学生身高的数据,对高三年级学生进行抽样调查,随机抽取了1000 名学生,他们的身高都在 A,B,C,D,E 五个层次内,分男、女生统计得到以下样本分布统计图,则所给叙述正确的是

女生身高频率分布直方图



男生身高分布扇形图



A. 样本中 A 层次的女生比相应层次的男生人数多

B. 估计样本中男生身高的中位数比女生身高的中位数大

C. D 层次的女生和 E 层次的男生在整个样本中频率相等

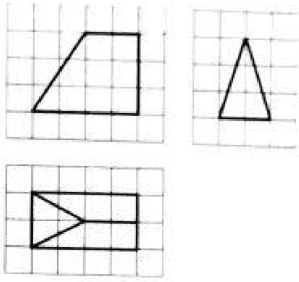
D. 样本中 B 层次的学生数和 C 层次的学生数一样多

6. 已知函数 $f(x)=\frac{4|x|}{1+|x|}$，则不等式 $f(2x-3)<2$ 的解集是

A. $(1,2)$　　B. $(\frac{1}{2},\frac{5}{2})$

C. $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$　　D. $(-\infty,\frac{1}{2})\cup(\frac{5}{2},+\infty)$

7. 如图，网格纸上绘制的是一个多面体的三视图，网格小正方形的边长为1，则该多面体的表面积为



A. $3+\sqrt{5}+6\sqrt{10}$

B. $11+\sqrt{5}+6\sqrt{10}$

C. $3+\sqrt{13}+6\sqrt{10}$

D. $11+\sqrt{13}+6\sqrt{10}$

8. 将函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})(\omega>0)$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的2倍，再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $y=g(x)$ 的图象，若 $y=g(x)$ 为奇函数，则 ω 的最小值为

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

9. 在三棱锥 $A-BCD$ 中，$AB\perp$ 平面 BCD，$CD\perp BC$，且 $BC=\sqrt{3}AB$，则直线 AB 与平面 ACD 所成的角为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

10. 从3名男同学和2名女同学中随机选3名参加诗歌朗诵比赛，则恰有1名女同学入选的概率为

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{3}{5}$

11. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别是 F_1,F_2，过右焦点 F_2 且不与 x 轴垂直的直线交 C 的右支于 A,B 两点，若 $AF_1\perp AB$，且 $|AB|=2|AF_1|$，则 C 的离心率为

A. $\sqrt{2}$　　B. $1+\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $1+\sqrt{3}$

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^x-2, x\geqslant 0,\\ \frac{x}{2}+1, x<0,\end{cases}$ 若 $m<n$，且 $f(m)=f(n)$，则 $n-m$ 的最大值是

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

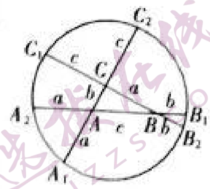
二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3-m,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,m)$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $m=$___▲___.

14. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列，且 $a_2=4$，$a_1+a_3+a_8=24$，则 $a_{29}=$___▲___.

15. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点是 F，A 是 C 的准线上一点，线段 AF 与 C 交于点 $B(\frac{p}{8},y_0)$，O 为坐标原点，且 $S_{\triangle AOF}=3$，则 $p=$___▲___.

16. “康威圆定理”是英国数学家约翰·康威引以为豪的研究成果之一. 定理的内容如下：如图，$\triangle ABC$ 的三条边长分别为 $|BC|=a$，$|AC|=b$，$|AB|=c$. 延长线段 CA 至点 A_1，使得 $|AA_1|=a$，延长线段 AC 至点 C_2，使得 $|CC_2|=c$，以此类推得到点 A_2,B_1,C_1,B_2，那么这六个点共圆，这个圆称为康威圆. 已知 $a=12,b=5,c=13$，则由 $\triangle ABC$ 生成的康威圆的半径为____▲____.



三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

17. (12 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，且 $(b-c)(\sin B+\sin C)=(a+c)\sin A$.

(1)求 B；

(2)若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$，且 $b=\dfrac{\sqrt{3}(a+c)}{2}$，求 $\triangle ABC$ 的周长.

18. (12 分)

为切实加强新时代儿童青少年近视防控工作，经国务院同意发布了《综合防控儿童青少年近视实施方案》. 为研究青少年每天使用手机的时长与近视率的关系，某机构对某校高一年级的 1000 名学生进行无记名调查，得到如下数据：有 40%的同学每天使用手机超过 1 h，这些同学的近视率为 40%，每天使用手机不超过 1 h 的同学的近视率为 25%.

(1)从该校高一年级的学生中随机抽取 1 名学生，求其近视的概率；

(2)请完成 2×2 列联表，通过计算判断能否有 99.9%的把握认为该校学生每天使用手机的时长与近视率有关联.

	每天使用超过 1 h	每天使用不超过 1 h	合计
近视			
不近视			
合计			1000

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

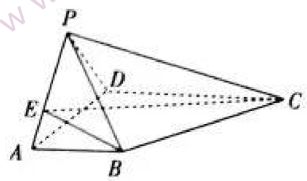
$P(K^2\geqslant k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

19.(12分)

在四棱锥 $P-ABCD$ 中,点 E 是棱 PA 上一点,$BE\perp PD$,$PA=PB=PD$,$AB=AD=\frac{1}{2}CD=2$,$\angle DAB=60^\circ$.

(1)证明:$PD\perp$平面 PAB.

(2)若 $CD/\!/AB$,$AE=\frac{1}{2}EP$,求三棱锥 $E-PBC$ 的体积.



20.(12分)

已知函数 $f(x)=2\ln x+\frac{a}{x}$,$a\in\mathbf{R}$.

(1)当 $a=4$ 时,求 $f(x)$的单调区间;

(2)设函数 $g(x)=\frac{f(x)-2}{x}$,若 $g(x)$在$(1,e^2)$上存在极值,求 a 的取值范围.

21.(12分)

已知椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右顶点是 $M(2,0)$,离心率为$\frac{1}{2}$.

(1)求椭圆 C 的标准方程.

(2)过点 $T(4,0)$作直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 A,B,点 B 关于 x 轴的对称点为 D,问直线 AD 是否过定点?若是,求出该定点的坐标;若不是,请说明理由.

(二)选考题:共10分.请考生在第22、23题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题计分.

22.[选修4—4:坐标系与参数方程](10分)

在直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=-1-2\cos\theta,\\ y=2\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数).以坐标原点为极点,x 轴正半轴为极轴建立极坐标系,已知直线 l 的极坐标方程为$\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$.

(1)求曲线 C 的普通方程与直线 l 的直角坐标方程;

(2)若直线 l'过点 $M(-2,1)$且与直线 l 平行,直线 l'交曲线 C 于 A,B 两点,求$\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}$的值.

23.[选修4—5:不等式选讲](10分)

已知 a,b,c 均为正数,且 $4a^2+b^2+16c^2=1$,证明:

(1)$2a+b+4c\leqslant\sqrt{3}$;

(2)$\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{16c^2}\geqslant 9$.

高三数学考试参考答案(文科)

1. C 【解析】本题考查集合的运算,考查数学运算的核心素养.

因为 $A=\{x|-1<x<5\}$, $B=\{-3,-1,1,3,5\}$,所以 $A\cap B=\{1,3\}$.

2. A 【解析】本题考查复数的四则运算,考查数学运算的核心素养.

因为 $z=2i(-1-2i)-i^5=4-3i$,所以 $|z|=\sqrt{16+9}=5$.

3. D 【解析】本题考查等比数列的通项公式及求和公式,考查数学运算的核心素养.

由 $\begin{cases}a_1+a_2=3,\\2a_1+a_2=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=1,\\a_2=2,\end{cases}$ 公比 $q=2$,所以 $S_6=\frac{1-2^6}{1-2}=63$.

4. B 【解析】本题考查函数的图象和性质,考查逻辑推理与直观想象的核心素养.

因为 $f(-x)=\cos x\cdot\ln\frac{\pi-x}{\pi+x}=-f(x)$,所以 $f(x)$ 是奇函数,排除 A,D.当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时,$\cos x>0$,$\ln\frac{\pi+x}{\pi-x}>0$,所以 $f(x)>0$,排除 C,故选 B.

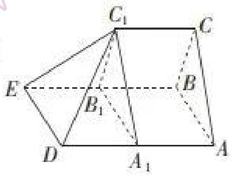
5. B 【解析】本题考查统计的知识,考查数据分析与数学运算的核心素养.

设女生身高频率分布直方图中的组距为 Δx,由 $(a+1.5a+2a+2.5a+3a)\Delta x=1$,得 $a\Delta x=0.1$,所以女生身高频率分布直方图中 A 层次频率为 20%,B 层次频率为 30%,C 层次频率为 25%,D 层次频率为 15%,E 层次频率为 10%.因为男、女生样本数未知,所以 A 层次中男、女生人数不能比较,即选项 A 错误;同理,D 层次女生在女生样本数中频率与 E 层次男生在男生样本数中频率相等,都是 15%,但因男、女生人数未知,所以在整个样本中频率不一定相等,即 C 错误;设女生人数为 n,男生人数为 $1000-n$,但因男、女生人数可能不相等,则 B 层次的学生数为 $0.3n+0.25\times(1000-n)=0.05n+250$,$C$ 层次的学生数为 $0.25n+0.3\times(1000-n)=300-0.05n$,因为 n 不确定,所以 $0.05n+250$ 与 $300-0.05n$ 可能不相等,即 D 错误;女生 A,B 两个层次的频率之和为 50%,所以女生的样本身高中位数为 B,C 层次的分界点,男生 A,B 两个层次的频率之和为 35%,显然中位数落在 C 层次内,所以样本中男生身高的中位数比女生身高的中位数大,B 正确.

6. A 【解析】本题考查函数的性质,考查直观想象与逻辑推理的核心素养.

因为 $f(-x)=f(x)$,所以 $f(x)$ 是偶函数,当 $x>0$ 时,$f(x)=\frac{4x}{1+x}=4-\frac{4}{1+x}$ 是增函数.又因为 $f(1)=2$,所以 $f(2x-3)<2$ 可化为 $|2x-3|<1$,解得 $1<x<2$.

7. D 【解析】本题考查三视图,考查直观想象与数学运算的核心素养.



如图,这是所求多面体的直观图,它可以看成由直三棱柱与四棱锥组合而成,所以表面积 $S=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{13}+\frac{1}{2}\times2\times3+\frac{(2+4)\sqrt{10}}{2}\times2+4\times2=11+\sqrt{13}+6\sqrt{10}$.

8. C 【解析】本题考查三角函数的性质,考查数学运算与直观想象的核心素养.

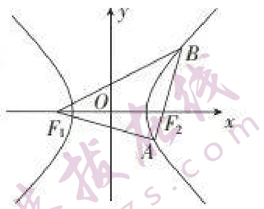
由题意,$g(x)=\sin[\frac{\omega}{2}(x-\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{6}]=\sin(\frac{\omega}{2}x+\frac{\pi}{6}-\frac{\omega\pi}{12})$,因为 $y=g(x)$ 为奇函数,所以 $\frac{\pi}{6}-\frac{\omega\pi}{12}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,解得 $\omega=2-12k(k\in\mathbf{Z})$,又 $\omega>0$,所以当 $k=0$ 时,ω 取得最小值 2.

9. C 【解析】本题考查三棱锥中直线与平面所成角的大小,考查直观想象与数学运算的核心素养.

因为 $AB\perp$ 平面 BCD,所以 $AB\perp CD$,又 $CD\perp BC$,所以 $CD\perp$ 平面 ABC.作 $BE\perp AC$,垂足为 E(图略),易知 $\angle BAE$ 是直线 AB 与平面 ACD 所成的角,因为 $\tan\angle BAC=\frac{BC}{AB}=\sqrt{3}$,所以 $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$.

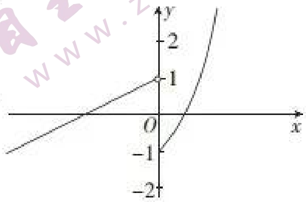
10. D 【解析】本题考查古典概型,考查数据分析与数学运算的核心素养.

设 3 名男同学分别为 A,B,C,2 名女同学分别为 d,e,从这 5 人中选 3 人的情形有 (A,B,C),(A,B,d),(A,B,e),(A,C,d),(A,C,e),(A,d,e),(B,C,d),(B,C,e),(B,d,e),(C,d,e),共 10 种,恰有 1 名女同学的情形有 (A,B,d),(A,B,e),(A,C,d),(A,C,e),(B,C,d),(B,C,e),共 6 种,则所求概率为 $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.



11. C 【解析】本题考查双曲线的性质，考查推理论证能力与数学运算的核心素养.

如图，设 $|AF_1|=m$，则 $|AF_2|=m-2a$. 又 $|AB|=2|AF_1|$，所以 $|BF_2|=m+2a$，所以 $|BF_1|=m+4a$. 又 $AF_1\perp AB$，所以 $|BF_1|=\sqrt{5}m$，由 $m+4a=\sqrt{5}m$，得 $m=(\sqrt{5}+1)a=|AF_1|$，则 $|AF_2|=m-2a=(2\sqrt{5}-1)a$，而 $|F_1F_2|=2c$，则 $4c^2=(\sqrt{5}+1)^2a^2+(\sqrt{5}-1)^2a^2$，化简得 $c^2=3a^2$，所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}$. 来源微信公众号：高三答案



12. A 【解析】本题考查分段函数及导数的应用，考查逻辑推理与数学运算的核心素养.

设 $f(n)=e^n-2=k-2$，$-1\leqslant k-2<1$，则 $n=\ln k(1\leqslant k<3)$，由 $f(m)=\frac{m}{2}+1=k-2$，得 $m=2k-6$，所以 $n-m=\ln k-2k+6$. 设 $g(k)=\ln k-2k+6$，$k\in[1,3)$，则 $g'(k)=\frac{1}{k}-2\leqslant 0$，$g(k)$ 在 $[1,3)$ 上单调递减，故 $g(k)_{\max}=g(1)=4$.

13. -3 【解析】本题考查平面向量的垂直以及数量积，考查数学运算的核心素养.

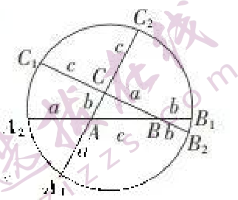
因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $3-m+2m=0$，则 $m=-3$.

14. 58 【解析】本题考查等差数列的通项公式，考查数学运算的核心素养.

因为 $a_1+a_3+a_8=3a_4=24$，所以 $a_4=8$，又 $a_2=4$，所以公差 $d=2$，从而 $a_{29}=4+2\times 27=58$.

15. 3 【解析】本题考查抛物线的概念与性质，考查逻辑推理的核心素养.

不妨设 B 在第一象限，则 $B(\frac{p}{8},\frac{p}{2})$，$k_{BF}=-\frac{4}{3}$，则直线 AF 的方程为 $y=-\frac{4}{3}(x-\frac{p}{2})$，令 $x=-\frac{p}{2}$，得 $y_A=\frac{4p}{3}$，由 $S_{\triangle AOF}=3=\frac{1}{2}\times\frac{p}{2}\times\frac{4p}{3}=\frac{p^2}{3}$，解得 $p=3$.



16. $\sqrt{229}$ 【解析】本题考查直线与圆，考查直观想象与数学抽象的核心素养.

因为 $|CC_1|=|CC_2|$，$|CA_1|=|CB_2|$，所以康威圆的圆心在 $\angle ACB$ 的平分线上，同理可知康威圆的圆心在 $\angle ABC$ 的平分线上，即康威圆的圆心为 $\triangle ABC$ 的内心. 因为 $a^2+b^2=c^2$，所以 $\angle ACB=90°$，所以 $\triangle ABC$ 的内切圆的半径 $r=\frac{5+12-13}{2}=2$，则康威圆的半径 $R=\sqrt{r^2+(\frac{5+12+13}{2})^2}=\sqrt{229}$.

17. 解：(1) 因为 $(b-c)(\sin B+\sin C)=(a+c)\sin A$，

所以 $(b-c)(b+c)=a(a+c)$， ………………………………………… 2 分

展开得 $a^2+c^2-b^2=-ac$，所以 $\cos B=\frac{-ac}{2ac}=-\frac{1}{2}$， ……………………………… 4 分

因为 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{2\pi}{3}$. ………………………………………… 6 分

(2) 由 (1) 知 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac=\sqrt{3}$，解得 $ac=4$， ……………………… 8 分

因为 $b=\frac{\sqrt{3}(a+c)}{2}$，由余弦定理得 $a^2+c^2-b^2=2ac\cos B=-ac$， ……………… 10 分

即 $(a+c)^2-\frac{3(a+c)^2}{4}=ac=4$，解得 $a+c=4$，$b=2\sqrt{3}$， ………………………… 11 分

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=2\sqrt{3}+4$. …………………………………… 12 分

评分细则：

【1】第一问，写出 $(b-c)(b+c)=a(a+c)$，得 2 分，写出 $\cos B=\frac{-ac}{2ac}=-\frac{1}{2}$，累计得 4 分，第一问全部正确解出，累计得 6 分.

【2】第二问，用面积公式求出 $ac=4$，累计得 8 分，最后求出正确答案，累计得 12 分.

【3】其他情况根据评分标准按步骤给分.

18. 解：(1)该校高一年级近视的学生人数为 $1000\times40\%\times40\%+1000\times60\%\times25\%=160+150=310$, …………………………………………………… 3 分

从该校高一年级的学生中随机抽取 1 名学生，其近视的概率为 $\frac{310}{1000}=\frac{31}{100}$. …………………… 5 分

(2)2×2 列联表为

	每天使用超过 1 h	每天使用不超过 1 h	合计
近视	160	150	310
不近视	240	450	690
合计	400	600	1000

…………………………………………………………………… 8 分

$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{1000\times(450\times160-240\times150)^2}{400\times600\times310\times690}$

$=\frac{1000\times36000\times36000}{400\times600\times310\times690}=\frac{18000}{713}\approx25.25>10.828$, …………………………………… 11 分

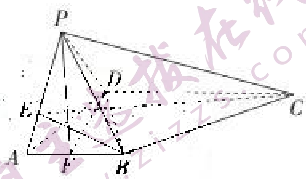
所以有 99.9% 的把握认为该校学生每天使用手机的时长与近视率有关联. …………………… 12 分

评分细则：

【1】第一问，算出高一年级近视的学生数为 310，得 3 分，正确算出所求概率，累计得 5 分.

【2】第二问，正确填写列联表，累计得 8 分，算出 $K^2=\frac{18000}{713}\approx25.25>10.828$，近似数位不够，不扣分，累计得 11 分，正确写出结论累计得 12 分.

19. (1)证明：取 AB 的中点 F，连接 FD、FP、BD.



因为 $PA=PB$，$AB=AD$，$\angle DAB=60^\circ$，所以 $AB=AD=BD$.

所以 $AB\perp PF$，$AB\perp FD$. ………………………………………… 2 分

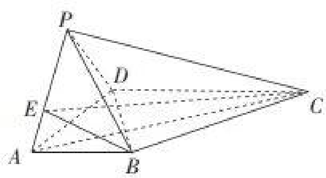
又 $PF\cap FD=F$，所以 $AB\perp$ 平面 PFD，从而 $AB\perp PD$. ……………… 3 分

因为 $BE\perp PD$，$AB\cap BE=B$，所以 $PD\perp$ 平面 PAB. …………………… 5 分

(2)解：连接 AC，BD，因为 $PD\perp$ 平面 PAB，所以 $PD\perp PB$，$PD\perp PA$，又 $AB=AD=BD=2$，所以 $PA=PB=PD=\sqrt{2}$. 设正三棱锥 $P-ABD$ 的底面三角形的外接圆半径为 r，三棱锥 $P-ABD$ 的高为 h，则 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}AB=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$h=\sqrt{PA^2-r^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$. …………………………………… 7 分

因为 $AE=\frac{1}{2}EP$，所以 $EP=\frac{2}{3}AP$，则 $V_{E-PBC}=\frac{2}{3}V_{A-PBC}$. ………………………………… 9 分

又 $V_{A-PBC}=V_{P-ABC}$，$CD/\!/AB$，$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$， …… 11 分



所以 $V_{E-PBC}=\frac{2}{3}V_{A-PBC}=\frac{2}{3}\times(\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3})=\frac{2\sqrt{2}}{9}$. ……………… 12 分

评分细则：

【1】第一问，证出 $AB\perp PF$，$AB\perp FD$，得 2 分，证出 $AB\perp PD$，累计得 3 分，第一问全部证完累计得 5 分.

【2】第二问，求出 r，h 的值，累计得 7 分，写出 $V_{E-PBC}=\frac{2}{3}V_{A-PBC}$，累计得 9 分，求出 $S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$，累计得 11 分，直至正确求出三棱锥的体积累计得 12 分.

20. 解：(1)当 $a=4$ 时，$f(x)=2\ln x+\frac{4}{x}$，其定义域为 $(0,+\infty)$， ……………………………… 1 分

可得 $f'(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{2x-4}{x^2}$. ………………………………………… 2分

当 $x\in(0,2)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,2)$，单调递增区间为 $(2,+\infty)$. ………………………… 4分

(2)由 $g(x)=\dfrac{f(x)-2}{x}=\dfrac{2\ln x}{x}+\dfrac{a}{x^2}-\dfrac{2}{x}$，$x\in(1,e^2)$，

可得 $g'(x)=\dfrac{2-2\ln x}{x^2}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{2a}{x^3}=\dfrac{4x-2x\ln x-2a}{x^3}$. ………………………… 5分

设 $h(x)=4x-2x\ln x-2a$，则 $h'(x)=4-(2+2\ln x)=2-2\ln x$， ………………………… 6分

令 $h'(x)=0$，即 $2-2\ln x=0$，解得 $x=e$.

当 $x\in(1,e)$ 时，$h'(x)>0$；当 $x\in(e,e^2)$ 时，$h'(x)<0$.

所以 $h(x)$ 在区间 $(1,e)$ 上单调递增，在区间 (e,e^2) 上单调递减， ………………………… 8分

且 $h(1)=4-2a$，$h(e)=2e-2a$，$h(e^2)=-2a$， ………………………… 9分

显然 $h(e)>h(1)>h(e^2)$，若 $g(x)$ 在 $(1,e^2)$ 上存在极值，则满足 $\begin{cases}h(e)>0,\\ h(e^2)<0,\end{cases}$ 解得 $0<a<e$， ………… 11分

所以实数 a 的取值范围为 $(0,e)$. ………………………… 12分

评分细则：

【1】第一问，写出 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，得1分，算出 $f'(x)=\dfrac{2x-4}{x^2}$，累计得2分，得出 $f(x)$ 的单调区间，累计得4分.

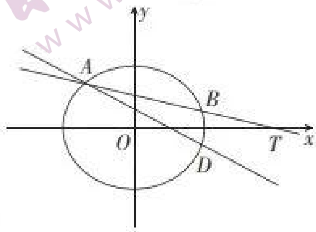
【2】第二问，求出 $g'(x)=\dfrac{4x-2x\ln x-2a}{x^3}$，累计得5分，求出 $h'(x)=2-2\ln x$，累计得6分，得出 $h(x)$ 的单调区间，累计得8分，算出 $h(1)=4-2a$，$h(e)=2e-2a$，$h(e^2)=-2a$，累计得9分，求出参数 a 的取值范围，累计得12分.

【3】采用其他方法，参照本评分标准依步骤给分.

21. 解：(1)由右顶点是 $M(2,0)$，得 $a=2$，又离心率 $e=\dfrac{1}{2}=\dfrac{c}{a}$，所以 $c=1$. ………………………… 2分

所以 $b^2=a^2-c^2=3$，所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ………………………… 4分

(2)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，显然直线 l 的斜率存在.



设直线 l 的方程为 $y=k(x-4)$，联立方程组 $\begin{cases}y=k(x-4),\\ 3x^2+4y^2=12,\end{cases}$

消去 y 得 $(4k^2+3)x^2-32k^2x+64k^2-12=0$，由 $\Delta>0$，得 $-\dfrac{1}{2}<k<\dfrac{1}{2}$，

所以 $x_1+x_2=\dfrac{32k^2}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\dfrac{64k^2-12}{4k^2+3}$. ………………………… 6分

因为点 $D(x_2,-y_2)$，所以直线 AD 的方程为 $y=\dfrac{y_1+y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)+k(x_1-4)$. ………………………… 7分

又 $y_1+y_2=k(x_1+x_2-8)$， ………………………… 8分

所以直线 AD 的方程可化为 $y=\dfrac{24k}{(x_2-x_1)(4k^2+3)}x+\dfrac{kx_1(x_1+x_2-8)}{x_2-x_1}+\dfrac{k(x_1-4)(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$，……… 10分

即 $y=\dfrac{24k}{(x_2-x_1)(4k^2+3)}x-\dfrac{24k}{(x_2-x_1)(4k^2+3)}=\dfrac{24k}{(x_2-x_1)(4k^2+3)}(x-1)$，………………………… 11分

所以直线 AD 恒过点 $(1,0)$. ………………………… 12分

评分细则：来源微信公众号：高三答案

(方法二)(1)同上(1). ………………………… 4分

(2)设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,直线 l 的方程为 $x=my+4$,

联立方程组 $\begin{cases}x=my+4,\\3x^2+4y^2=12,\end{cases}$ 消去 x 得 $(3m^2+4)y^2+24my+36=0$,

由 $\Delta>0$,得 $m>2$ 或 $m<-2$,所以 $y_1+y_2=-\dfrac{24m}{3m^2+4}$,$y_1y_2=\dfrac{36}{3m^2+4}$. ………… 6 分

因为点 $D(x_2,-y_2)$,则直线 AD 的方程为 $y=\dfrac{y_1+y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)+y_1$. ………… 7 分

又 $x_1-x_2=my_1+4-my_2-4=m(y_1-y_2)$, ………… 8 分

所以直线 AD 的方程可化为 $y=\dfrac{-(y_1+y_2)}{m(y_2-y_1)}(x-my_1-4)+y_1=-\dfrac{y_1+y_2}{m(y_2-y_1)}x+\dfrac{(y_1+y_2)(my_1+4)+y_1m(y_2-y_1)}{m(y_2-y_1)}=-\dfrac{y_1+y_2}{m(y_2-y_1)}x+\dfrac{2my_1y_2+4(y_1+y_2)}{m(y_2-y_1)}=\dfrac{24}{(3m^2+4)(y_2-y_1)}(x-1)$,

此时直线 AD 恒过点 $(1,0)$, ………… 10 分

当直线 l 的斜率为 0 时,直线 l 的方程为 $y=0$,也过点 $(1,0)$. ………… 11 分

综上,直线 AD 恒过点 $(1,0)$. ………… 12 分

说明:第(2)问还可以先猜想出定点在 x 轴上,写出直线 AD 的方程,令 $y=0$,求出定点坐标为 $(1,0)$ 后再加以证明,也可以得满分.

22. 解:(1)曲线 C 的普通方程为 $(x+1)^2+y^2=4$. ………… 2 分

由 $\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$,得 $\rho\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\rho\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$,即 $\rho\sin\theta+\rho\cos\theta=2$,

因为 $x=\rho\cos\theta$,$y=\rho\sin\theta$,所以直线 l 的直角坐标方程为 $x+y-2=0$. ………… 4 分

(2)因为直线 l 的斜率为 -1,所以 l 的倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$,

所以过点 $M(-2,1)$ 且与直线 l 平行的直线 l' 的方程可设为 $\begin{cases}x=-2-\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\y=1-\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ (t 为参数). ………… 6 分

设点 A,B 对应的参数分别为 t_1,t_2,将 $\begin{cases}x=-2-\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\y=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ 代入 $(x+1)^2+y^2=4$,可得 $(-1-\frac{\sqrt{2}}{2}t)^2+(1+\frac{\sqrt{2}}{2}t)^2=4$,整理得 $t^2+2\sqrt{2}t-2=0$,则 $\Delta>0$,$t_1+t_2=-2\sqrt{2}$,$t_1t_2=-2$, ………… 8 分

所以 $\dfrac{1}{|MA|}+\dfrac{1}{|MB|}=\dfrac{|MA|+|MB|}{|MA||MB|}=\dfrac{|t_1-t_2|}{|t_1t_2|}=\dfrac{\sqrt{(-2\sqrt{2})^2+4\times2}}{2}=2$. ………… 10 分

评分细则:

【1】第一问,圆的方程没有写成标准方程,不扣分,累计得 2 分,写出直线 l 的方程,不管哪种形式,不扣分,累计得 4 分.

【2】第二问,写出直线 l' 的参数方程,累计得 6 分,联立方程组并写出 $t_1+t_2=-2\sqrt{2}$,$t_1t_2=-2$,累计得 8 分,求出 $\dfrac{1}{|MA|}+\dfrac{1}{|MB|}=2$,累计得 10 分.

23. 证明:(1)由已知可得 $3=4a^2+b^2+16c^2+(4a^2+b^2)+(4a^2+16c^2)+(b^2+16c^2)\geqslant4a^2+b^2+16c^2+4ab+16ac+8bc=(2a+b+4c)^2$, ………… 3 分

当且仅当 $2a=b=4c=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时,等号成立. ………… 4 分

又 a,b,c 均为正数,所以 $2a+b+4c\leqslant\sqrt{3}$. ………… 5 分

(2)因为$(2a)^2+b^2+(4c)^2\geqslant 3\sqrt[3]{(2a)^2b^2(4c)^2}$，

当且仅当$2a=b=4c=\frac{\sqrt{3}}{3}$时，等号成立， …… 7分

所以$3\times 4\sqrt[3]{(abc)^2}\leqslant 1$，整理得$(abc)^2\leqslant(\frac{1}{12})^3$， …… 8分

所以$\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{16c^2}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{4a^2}\cdot\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{16c^2}}=\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}}\geqslant\frac{3}{4}\sqrt[3]{12^3}=9$，

当且仅当$2a=b=4c=\frac{\sqrt{3}}{3}$时，等号成立. …… 10分

评分细则：

(证法二)证明：(1)由柯西不等式得$[(2a)^2+b^2+(4c)^2](1^2+1^2+1^2)\geqslant(2a+b+4c)^2$， …… 3分

所以$(2a+b+4c)^2\leqslant 3$. …… 4分

因为a,b,c均为正数，所以$2a+b+4c\leqslant\sqrt{3}$(当且仅当$2a=b=4c=\frac{\sqrt{3}}{3}$时，等号成立). …… 5分

(2)$(\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{16c^2})(4a^2+b^2+16c^2)$

$=1+1+1+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{16c^2}{4a^2}+\frac{4a^2}{b^2}+\frac{16c^2}{b^2}+\frac{4a^2}{16c^2}+\frac{b^2}{16c^2}$ …… 7分

$=3+(\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4a^2}{b^2})+(\frac{16c^2}{4a^2}+\frac{4a^2}{16c^2})+(\frac{16c^2}{b^2}+\frac{b^2}{16c^2})$ …… 8分

$\geqslant 3+2\sqrt{\frac{b}{2a}\cdot\frac{2a}{b}}+2\sqrt{\frac{4c}{2a}\cdot\frac{2a}{4c}}+2\sqrt{\frac{4c}{b}\cdot\frac{b}{4c}}=9$，

当且仅当$2a=b=4c=\frac{\sqrt{3}}{3}$时，等号成立. …… 10分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。