湖北省部分市州 2023 年元月高三年级联合调研考试·数学

参考答案、提示及评分细则

一、单项选择题

1. C　2. D　3. A　4. C　5. B　6. D　7. B　8. B

二、多项选择题

9. BC　10. ABC　11. ABD　12. ACD

三、填空题

13. 6　14. $\frac{17}{32}$　15. 5　16. $\frac{1}{e}$

17. 解：(1)因为 $\sin C=\sqrt{2}\sin B$，

由正弦定理得：$c=\sqrt{2}b$，且 $c=4\sqrt{2}$，

所以 $b=4$. ………………………………………………………………………… 3 分

(2)延长 AD 至点 E，满足 $AD=DE$，连接 EB，EC，在△EBC 中，

由余弦定理得：$\cos\angle CAE=\dfrac{AE^2+AC^2-CE^2}{2AE\cdot AC}=\dfrac{3}{4}$，

因为 $AC=4$，$EC=4\sqrt{2}$，

代入上式整理得：$AE=8$，所以 $AD=4$ ……………………………………………… 8 分

所以 $S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle ADC}=2\cdot\frac{1}{2}AD\cdot AC\cdot\sin\angle ADC=4\sqrt{7}$. ……………… 10 分

18. 解：(1)由条件 $a_n+a_{n+1}=4n$，可得：$a_1+a_2=4$，$a_2+a_3=8$，

因为 $\{a_n\}$ 为等差数列，设公差为 d，由上式可得：$a_1=1$，$d=2$，

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$. ……………………………… 5 分

(2)由条件 $a_n+a_{n+1}=4n$，可得：$a_{n+1}+a_{n+2}=4(n+1)$，

两式相减得：$a_{n+2}-a_n=4$，因为 $a_1=3$，所以 $a_2=1$，

所以数列 $\{a_n\}$ 的奇数项是首项为 3，公差为 4 的等差数列；

偶数项是首项为 1 公差为 4 的等差数列. ………………………………………… 8 分

所以当 n 为偶数时，

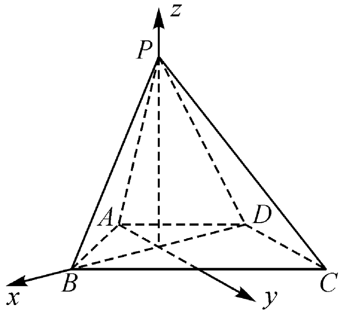
$$S_n=S_{奇}+S_{偶}=3\times\frac{n}{2}+\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2}\times4+1\times\frac{n}{2}+\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2}\times4=n^2;$$ ………… 10 分

当 n 为奇数时，

$S_n=S_{n-1}+a_n=(n-1)^2+2n+1=n^2+2$.

综上：$S_n=\begin{cases}n^2, & n\text{ 为偶数}\\ n^2+2, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$. …………………………………………… 12 分

19. 解:(1)连接 BD,设 BD 的中点为 O,连接 OA,OP.



因为 $AB=AD$,所以 $OA\perp BD$,

因为 $PB=PD$,所以 $OP\perp BD$,

又 $OA\cap OP=O$,所以 $BD\perp$ 平面 OAP,

因为 $PA\subset$ 平面 OAP,所以 $BD\perp PA$. …………………… 4 分

(2)因为 $\angle BAD=90^\circ$,所以 $OA=OB$,又 $PA=PB$,

所以 $\triangle POA\cong\triangle POB$,所以 $OP\perp OA$,又 $OA\cap BD=O$,

所以 $OP\perp$ 平面 $ABCD$. …………………………………………………………… 5 分

如图,以 O 为原点,OB,OP 所在直线分别为 x 轴、z 轴建立空间直角坐标系,

则 $A(0,-1,0)$,$B(1,0,0)$,$C(-1,2,0)$,$D(-1,0,0)$,$P(0,0,\sqrt{3})$, ………… 6 分

所以 $\overrightarrow{AB}=(1,1,0)$,$\overrightarrow{AP}=(0,1,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$,$\overrightarrow{DP}=(1,0,\sqrt{3})$,

$\overrightarrow{BC}=(-2,2,0)$,平面 PCD 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}=(x_0,y_0,z_0)$,

所以 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2y_0=0,\\ x_0+\sqrt{3}z_0=0,\end{cases}$ 取 $x_0=\sqrt{3}$,则 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},0,-1)$, ………… 9 分

设 $\overrightarrow{BC}$ 与平面 PCD 所成的角为 α,则 $\sin\alpha=|\cos\langle\overrightarrow{BC},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\dfrac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{4}}\right|=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ …… 11 分

则直线 BC 与平面 PCD 的夹角余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$. ……………………………… 12 分

20. 解:(1)甲队参加两场比赛后积分 X 的取值为 0,1,2,3,4,6.

所以随机变量 X 的分布列为:

X	0	1	2	3	4	6
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

…………………………………………………………………………………………… 3 分

随机变量 X 的数学期望:

$E(X)=0\times\frac{1}{16}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{8}+4\times\frac{1}{4}+6\times\frac{1}{16}=\frac{5}{2}$. …………………… 5 分

(2)由于小组赛共打 6 场比赛,每场比赛两个球队共积 2 分或者 3 分;6 场比赛总积分的所有情况为 12 分,13 分,14 分,15 分,16 分,17 分,18 分共 7 种情况,要使四支球队积分相同,则总积分被 4 整除,所以 每只球队总积分为 3 分或者 4 分. … 7 分

若每支球队得 3 分:

则 6 场比赛都出现平局,其概率为:$P_1=\frac{1}{2^6}$; ………………………………… 8 分

若每支球队得 4 分:

则 6 场比赛出现 2 场平局，则每支球队 3 场比赛结果均为 1 胜 1 平 1 负，

其概率为：$P_2=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 6=\frac{6}{4^5}$. ………………………… 11 分

所以四支球队积分相同的概率为 $P=P_1+P_2=\frac{1}{2^6}+\frac{6}{4^5}=\frac{11}{512}$. ……………… 12 分

21.(1)依题意有当 M 为椭圆短轴端点时

$\angle F_1MF_2$ 最大，此时 $\angle F_1MF_2=\frac{\pi}{3}$，则

$\triangle F_1MF_2$ 为正三角形，则 $a=2c$

且 $(\overrightarrow{MF_1}+\overrightarrow{MF_2})\cdot\overrightarrow{MF_1}=2\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MF_1}=2b\cdot a\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}ba=6$

$\therefore ba=2\sqrt{3}$，又 $a^2=b^2+c^2$，$\therefore a=2,b=\sqrt{3},c=1$

故椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………………………………… 4 分

(2)设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),P(4,t)(t\neq 0)$，

则依题意有 $PA:\frac{x_1x}{4}+\frac{y_1y}{3}=1$，$PB:\frac{x_2x}{4}+\frac{y_2y}{3}=1$

(注：椭圆上一点的切线方程结论要求证明，没有证明扣一分，本答案证明过程略)

因 PA,PB 都过点 $P(4,t)$，则 $x_1+\frac{y_1t}{3}=1$，$x_2+\frac{y_2t}{3}=1$

则 AB 方程为 $x+\frac{yt}{3}=1$，即 AB 过定点 $(1,0)$. ………………………………… 6 分

故设 AB 方程为 $x=my+1,m\neq 0$，

联立 $\begin{cases}x=my+1\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$，

$\therefore(3m^2+4)y^2+6my-9=0$

$\therefore y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$，又 $B'(x_2,-y_2)$ ………………………… 7 分

直线 AB' 方程为：$y-y_1=\frac{-y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$，令 $y=0$ 得

$$x_G=\frac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1+y_2}=\frac{(my_1+1)y_2+(my_2+1)y_1}{y_1+y_2}=\frac{2my_1y_2+y_1+y_2}{y_1+y_2}$$

$$=2m\cdot\frac{y_1y_2}{y_1+y_2}+1=2m\cdot\frac{\frac{-9}{3m^2+4}}{\frac{-6m}{3m^2+4}}+1=4，\therefore G(4,0)$$ ………………………… 9 分

$$\therefore|S_1-S_2|=\frac{1}{2}|F_2G|\cdot||y_1|-|y_2||=\frac{3}{2}|y_1+y_2|=\frac{3}{2}\cdot\frac{6|m|}{3m^2+4}$$

$=\dfrac{9|m|}{3m^2+4}=\dfrac{9}{3|m|+\dfrac{4}{|m|}}\leqslant\dfrac{9}{2\sqrt{12}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

当且仅当 $3|m|=\dfrac{4}{|m|}$ 即 $m^2=\dfrac{4}{3}$，$m=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 时取等号

故 $|S_1-S_2|$ 最大值为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. ………………………………………………………… 12 分

22. 解：(1) $a=1$ 时，$f(x)=2x(2-\cos 2x)-\sin 2x$，$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

设 $2x=t$，$t\in[0,\pi]$ 即 $g(t)=t(2-\cos t)-\sin t=2t-t\cos t-\sin t$

$g'(t)=2-\cos t+t\sin t-\cos t=2-2\cos t+t\sin t>0$

$\therefore g(t)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增

$\therefore g(t)_{\min}=g(0)=0$，$g(t)_{\max}=g(\pi)=\pi(2-\cos\pi)-\sin\pi=3\pi$，

即 $f(x)_{\min}=0$，$f(x)_{\max}=3\pi$ ………………………………………………………… 4 分

(2) $f\left(\dfrac{x}{2}+\pi\right)>2a\pi(2-\cos x)$ 即 $2a\left(\dfrac{x}{2}+\pi\right)(2-\cos x)-\sin x>2a\pi(2-\cos x)$

即 $ax(2-\cos x)-\sin x>0$，对 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立， ………………………… 5 分

设 $h(x)=ax(2-\cos x)-\sin x$，$h(0)=0$

当 $a\geqslant 1$ 时，$h(x)\geqslant x(2-\cos x)-\sin x$，

由(1)知 $x\in[0,\pi]$ 时，$x(2-\cos x)-\sin x\geqslant 0$，$\therefore h(x)\geqslant 0$

当 $x\in(\pi,+\infty)$ 时，$x(2-\cos x)-\sin x=x(1-\cos x)+x-\sin x>0$ ……… 8 分

当 $a\leqslant 0$ 时，$h(x)=ax(2-\cos x)-\sin x$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$h(x)<0$，不合题意. …… 9 分

当 $0<a<1$ 时，$h'(x)=2a-a(\cos x-x\sin x)-\cos x=2a-a\cos x+ax\sin x-\cos x$，$h'(0)=a-1$

$h''(x)=(2a+1)\sin x+ax\cos x$

当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$h''(x)>0$，$\therefore h'(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递增

又 $h'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\left(2+\dfrac{\pi}{2}\right)a>0$，$h'(0)=a-1<0$

$\therefore$ 存在 $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 使 $h'(x_0)=0$，当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)<0$

$\therefore h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递减，此时 $h(x)<h(0)=0$，不合题意

综上 $a\geqslant 1$. ………………………………………………………………………… 12 分