

参照秘密级管理★启用前

试卷类型：A

2022 级高一下学期期末校际联合考试

数学试题

2023.07

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束，将试题卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. $\sin 20^\circ \cos 40^\circ + \cos 20^\circ \sin 40^\circ$ 的值为

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A 为钝角，则点 $P(\tan B, \cos A)$ 在

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

3. 已知 C 为线段 AB 上一点，且 $AC = 2BC$ ，若 O 为直线 AC 外一点，则

- A. $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ B. $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$
C. $\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ D. $\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$

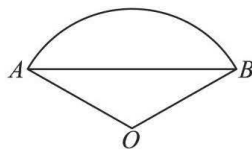
4. 我国北宋时期著作《梦溪笔谈》收录了计算扇形弧长的近似计算公式：

$$l_{\widehat{AB}} = \text{弦} + \frac{2 \times \text{矢}^2}{\text{径}}, \text{ 公式中“弦”是指扇形中圆弧所对弦的长, “矢”}$$

是指圆弧所在圆的半径与圆心到弦的距离之差, “径”是指扇形所在圆

的直径. 如图, 已知扇形的面积为 $\frac{4\pi}{3}$, 扇形所在圆 O 的半径为 2,

利用上述公式, 计算该扇形弧长的近似值为



- A. $\sqrt{3}+2$ B. $\frac{3\sqrt{3}+2}{2}$ C. $\frac{4\sqrt{3}+1}{2}$ D. $2\sqrt{3}+1$
5. 把函数 $y = \sin x$ 的图像上所有的点向左平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再把所得图像上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变), 得到的图像所表示的函数是
- A. $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ B. $y = \sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6})$
C. $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ D. $y = \sin(2x + \frac{2\pi}{3})$
6. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$ ($\omega > 0$) 在区间 $[-\frac{5\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$ 上单调递增, 且 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{5\pi}{6}]$ 上只取得一次最大值, 则 ω 的取值范围为
- A. $[\frac{1}{5}, \frac{1}{2}]$ B. $[\frac{2}{5}, \frac{1}{2}]$ C. $[\frac{1}{5}, \frac{4}{5}]$ D. $[\frac{2}{5}, \frac{4}{5}]$
7. 一个棱长为1分米的正方体形封闭容器中盛有 V 升水 (没有盛满), 若将该容器任意放置均不能使容器内水平面呈三角形, 则 V 的一个可能取值为
- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{5}{6}$
8. 一纸片上绘有函数 $f(x) = 2\sin(\omega x - \frac{\pi}{6})$ ($\omega > 0$) 一个周期的图像, 现将该纸片沿 x 轴折成直二面角, 此时原图像上相邻的最高点和最低点的空间距离为 $2\sqrt{3}$, 若方程 $f(x) = -1$ 在区间 $(0, a)$ 上有两个实根, 则实数 a 的取值范围是
- A. $[\frac{8}{3}, 4)$ B. $(\frac{8}{3}, 4]$ C. $[4, \frac{20}{3})$ D. $(4, \frac{20}{3}]$

二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求的, 全部选对得 5 分, 选对但不全的得 2 分, 有选错的得 0 分。

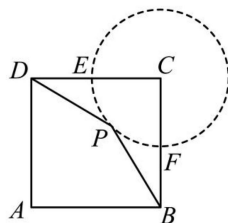
9. 下列选项正确的是

A. $\sin 15^\circ + \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2}$ B. $\sin^2 \frac{\pi}{8} - \cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

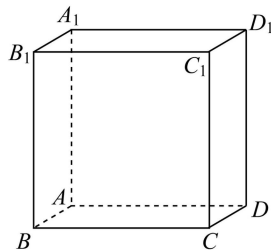
- C. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $A > C$, 则 $\sin A > \sin C$
- D. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a \cos A = b \cos B$, 则 $\triangle ABC$ 一定是等腰三角形
10. 已知 α, β 为两个不同平面, m, n 为两条不同的直线, 下列结论正确的为
- A. 若 $m \parallel n, m \perp \alpha$, 则 $n \perp \alpha$ B. 若 $m \perp \alpha, m \perp \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$
- C. 若 $\alpha \perp \beta, m \perp \alpha$, 则 $m \parallel \beta$ D. 若 $m \perp \alpha, m \subset \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$
11. 已知函数 $f(x) = |\cos 2x| + \cos |x|$, 有下列四个结论, 其中正确的为
- A. $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称 B. $f(x)$ 在区间 $[\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}]$ 上单调递增
- C. π 不是 $f(x)$ 的一个周期 D. 当 $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ 时, $f(x)$ 的值域为 $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{9}{8}]$
12. 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB = 2, BC = 6, AD = CD = 4$, 其外接圆圆心为 O , 下列说法正确的是
- A. 四边形 $ABCD$ 的面积为 $8\sqrt{3}$ B. 该外接圆的直径为 $\frac{2\sqrt{21}}{3}$
- C. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 16$ D. 过 D 作 $DF \perp BC$ 交 BC 于 F 点, 则 $\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{DF} = 10$

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知向量 $a = (1, 2), b = (-1, \lambda)$, 若 $a \perp b$, 则 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$.
14. 已知角 α 的顶点在原点, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 终边与单位圆交于点 $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$, 则 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \underline{\hspace{2cm}}$.
15. 如图, 在边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中, 以 C 为圆心, 1 为半径的圆分别交 CD, BC 于点 E, F . 当点 P 在圆 C 上运动时, $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{DP}$ 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



16. 如图, 在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, $AB = 1, AD = 2, AA_1 = 2, \angle ABC = 60^\circ$, 点 P 在上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 所在平面上, 使得 $\overrightarrow{PA_1} \cdot \overrightarrow{PD_1} = 0$, 点 Q 在下底面 $ABCD$ 所在平面上, 使得 $\overrightarrow{QB} \cdot \overrightarrow{QC} = 0$, 若三棱锥 $P-BCQ$ 的外接球表面积为 S , 则 S 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.



四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

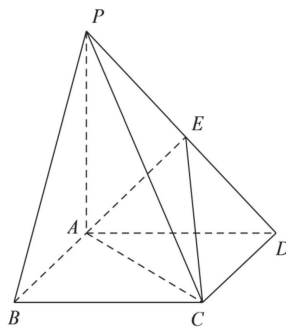
在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且 $a = 4, b = 5, \cos C = \frac{1}{8}$ 。

- (1) 求 $\triangle ABC$ 的面积；
- (2) 求边长 c 及 $\sin A$ 的值。

18. (12 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面四边形 $ABCD$ 是正方形， $PA \perp$ 面 $ABCD$ ， $PA = 2\sqrt{3}$ ， $AB = 2$ ，点 E 是 PD 的中点。

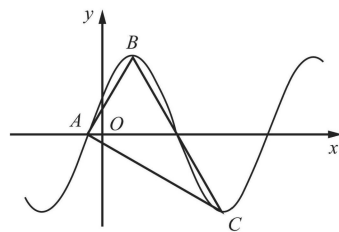
- (1) 求证： $PB \parallel$ 平面 ACE ；
- (2) 求点 P 到平面 ACE 的距离。



19. (12 分)

已知函数 $f(x) = \lambda \sin(\omega x + \varphi)$ ($\lambda > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图像如图所示， A 为图像与 x 轴的交点， B, C 分别为图像的最高点和最低点。在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ， $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{\sqrt{3}}{2} ac \cos B$ 。

- (1) 求角 B 的大小；
- (2) 若 $b = \sqrt{3}$ ， $a = 2c$ ，点 B 的坐标为 $(\frac{1}{3}, \lambda)$ ，求 $f(x)$ 的解析式。



20. (12 分)

已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$ ($A > 0, \omega > 0$) 只能同时满足下列三个条件中的两个:

① 函数 $f(x)$ 的最大值为 2; ② 函数 $f(x)$ 的图像可由 $y = \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})$ 的图像沿 x 轴

左右平移得到; ③ 函数 $f(x)$ 图像的相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

(1) 请写出这两个条件的序号, 求 $f(x)$ 的解析式, 并求出 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上的值域;

(2) 求方程 $f(x) + 1 = 0$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上所有解的和.

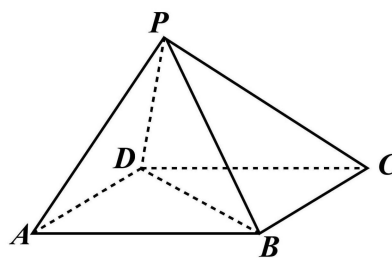
21. (12 分)

如图所示, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 且 $\angle A = 60^\circ$, $AD = PD = 2$, $AB = PB = 4$.

(1) 证明: 平面 $BCD \perp$ 平面 PAD ;

(2) 当二面角 $D-PA-B$ 的平面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$ 时,

求直线 BD 与平面 PBC 夹角的正弦值.

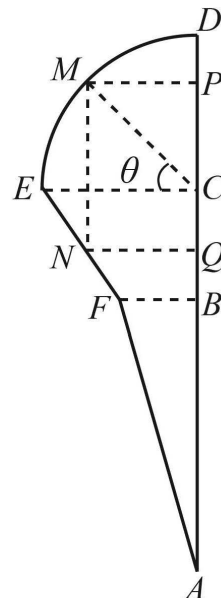


22. (12分)

某烟花厂准备生产一款环保、安全的迷你小烟花，初步设计了一个平面图，如图所示，该平面图由 $Rt\triangle ABF$ ，直角梯形 $BCEF$ 和以 C 为圆心的四分之一圆弧 ED 构成，其中 $AB \perp BF$ ，

$BC \perp CE$ ， $BF \parallel CE$ ，且 $BC = BF = 1$ ， $CE = 2$ ， $AB = \frac{7}{2}$ ，

将平面图形 $ADEF$ 以 AD 所在直线为轴，旋转一周形成的几何体即为烟花。



(1) 求该烟花的体积；

(2) 工厂准备将矩形 $PMNQ$ (该矩形内接于图形 $BDEF$ ， M 在弧 DE 上， N 在线段 EF 上， PQ 在 AD 上) 旋转所形成的几何体用来安放燃料，设 $\angle MCE = \theta (0 < \theta \leq \frac{\pi}{3})$ ，

① 请用 θ 表示燃料的体积 V ；

② 若烟花燃烧时间 t 和燃料体积 V 满足关系 $t = \frac{V}{(9 - 7 \cos \theta) \cos^2 \theta}$ ，请计算这个烟花

燃烧的最长时间。

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线