姓名________ 座位号________________

（在此卷上答题无效）

数 学（理科）

本试卷共4页，全卷满分150分，考试时间120分钟。

考生注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

$x\geq 2$　$-3<x<5$

1. 已知集合 $A=\{x\mid y^2=2x-4,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid x^2-2x<15\}$，则 $A\cap B=$　B

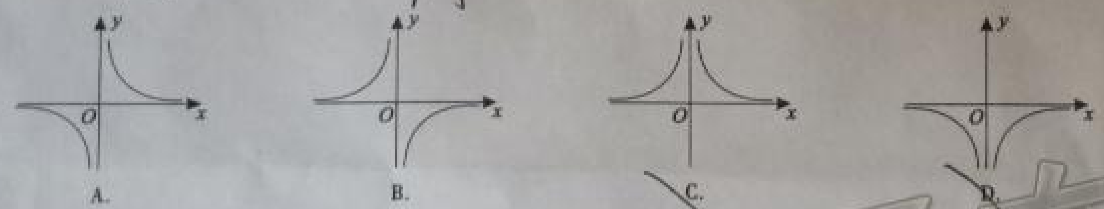
A. $(-3,2]$　　B. $[2,5)$　　C. $(-5,2]$　　D. $[2,3)$

2. 若两条直线 a,b 分别在两个不同的平面 α,β 内，则“直线 a,b 不相交”是“$\alpha/\!/\beta$”的　B

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　大　小

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

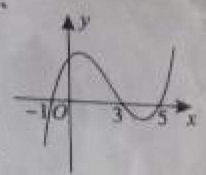
3. 函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{e^{2x}-1}$ 的图象大致为　A



4. 在平面直角坐标系中，点 (x_0,y_0) 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$，类比可得在空间直角坐标系中，点 $(2,3,4)$ 到平面 $x+2y+2z-4=0$ 的距离为　A

A. 4　　B. 5　　C. $\dfrac{16}{3}$　　D. $\dfrac{20}{3}$

5. 已知函数 $f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图象如图所示，则下列结论正确的是　B



A. $f(-1)=f(3)$　　B. $f(-1)<f(3)$

C. $f(3)<f(5)$　　D. $f(-1)>f(5)$

6. 某城镇为改善当地生态环境，2016年初投入资金120万元，以后每年投入资金比上一年增加10万元，从2020年初开始每年投入资金比上一年增加10%，到2025年底该城镇生态环境建设共投资大约为　D

A. 1600万元　　B. 1660万元　　C. 1700万元　　D. 1810万元

7. 由曲线 $y=\frac{1}{x-1}$ 与直线 $y=x-1$ 及 $y=3$ 所围成的封闭图形的面积为

A. $2-\ln3$　　B. $2+\ln3$　　C. $4-\ln3$　　D. $4+\ln3$

C

8. 已知将向量 $a=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 绕起点逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$ 得到向量 b，则 $b=$

A. $\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$　　B. $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$

C. $\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4},\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)$　　D. $\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4},\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)$

C

9. 已知实数 a,b 满足 $\ln a+\ln b=\ln(a+b+3)$，则 $a+b$ 的最小值为

A. $2\sqrt{3}$　　B. 4　　C. $2\sqrt{5}$　　D. 6

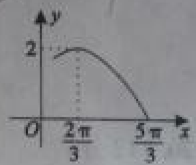
D

10. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足：$S_m<S_{m+2}<S_{m+1}$，若 $S_n>0$，则 n 的最大值为

A. $2m$　　B. $2m+1$　　C. $2m+2$　　D. $2m+3$

C

11. 函数 $f(x)=A[\sin(\omega x+\theta)+\cos(\omega x+\theta)]$ 部分图象如图所示，当 $x\in[-\pi,2\pi]$ 时，$f(x)$ 最小值为



A. -1　　B. -2　　C. $-\sqrt{2}$　　D. $-\sqrt{3}$

D

12. 已知关于 x 的方程 $x-\ln a=2\ln|x|$ 有三个不等的实数根，则实数 a 的取值范围是

A. $\left(\frac{1}{2}e,+\infty\right)$　　B. $\left(\frac{e^2}{4},+\infty\right)$

C. $(e,+\infty)$　　D. $(e^2,+\infty)$

B

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=3$，则 $\sin^2\alpha+\sin2\alpha=$ 1 .

$\tan\alpha=\frac{1}{2}$

14. 已知实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y\geq2\\x-y\leq2\\x-4y+4\geq0\end{cases}$，则 $z=x-2y$ 的最大值为 2 .

15. 中国茶文化博大精深，茶水的口感与茶叶类型和水的温度有关. 经研究可知：在室温 25℃ 下，某种绿茶用 85℃ 的水泡制，经过 x min 后茶水的温度为 y℃，且 $y=k\times0.9085^x+25$ $(x\geq0,k\in\mathbf{R})$. 当茶水温度降至 55℃ 时饮用口感最佳，此时茶水泡制时间大约为 7 min（结果保留整数）.（参考数据：$\ln2\approx0.6931$，$\ln3\approx1.0986$，$\ln0.9085\approx-0.0960$）

16. 已知等边三角形 ABC 的边长为 6，点 P 满足 $3\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$，则 $|\overrightarrow{PA}|=$ 7 .

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=2a_n-n^2$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 求证：数列 $\{a_n+2n+3\}$ 是等比数列；

(2) 求 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}$.

$k\,0.9085^x+25=y$

18.（12 分）

在△ABC 中，$AB=\sqrt{3}AC$，AD 为边 BC 上的中线，记∠CAD=2∠BAD=2α.

BC

（1）求证：△ABC 为直角三角形；

（2）若 $AD=1$，延长 BC 到点 E，使得 $AE=\sqrt{13}CE$，求△ABE 的面积.

19.（12 分）

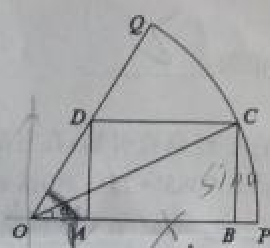
已知函数 $f(x)=2x^3-3(a^2-a+2)x^2+12(a^2-a)x+1$，$a\in\mathbf{R}$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

$f'(x)=6x^2-6(a^2-a+2)x+12(a^2-a)>0$

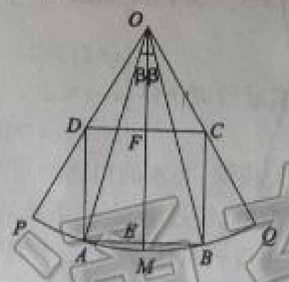
$x^2-(a^2-a+2)x+2(a^2-a)>0$

20.（12 分）

已知在扇形 OPQ 中，半径 $OP=1$，圆心角∠$POQ=\frac{\pi}{3}$. 从该扇形中截取一个矩形 $ABCD$，有以下两种方案：方案一：（如图 1）C 是扇形弧上的动点，记∠$COP=\alpha$，矩形 $ABCD$ 内接于扇形；方案二：（如图 2）M 是扇形弧的中点，A、B 分别是弧 $\overset{\frown}{PM}$ 和 $\overset{\frown}{MQ}$ 上的点，记∠AOM=∠BOM=β，矩形 $ABCD$ 内接于扇形. 要使截取的矩形面积最大，应选取哪种方案？并求出矩形的最大面积.



图（1）



图（2）

C(cosα, sinα)

sinαcosα -

21.（12分）

已知函数$f(x)=\ln(x+1)$，$g(x)=\dfrac{ax}{x+1}$，若$F(x)=f(x)-g(x)$最小值为0.

（1）求实数a的值；

（2）设$n\in\mathbf{N}^*$，证明：$g(1)+g(2)+\cdots+g(n)+f(n)>n$.

22.（12分）

已知函数$f(x)=\ln(x+n)\ (n\in\mathbf{R})$.

（1）若曲线$y=f(x)$与直线$y=x$相切，求n的值；

（2）若存在$x_0\geqslant 0$，使$f(x_0)>e^{2x_0}-x_0^2$成立，求实数n的取值范围.

$x+n>0$

$\dfrac{1}{x+n}=1$

理数参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	B	A	A	B	D	C	C	D	C	D	B

集合与简易逻辑，函数，导数及其应用，三角，向量，数列，不等式，推理与证明（不等式以后占比较少）；

1.【解析】$A=\left\{x\middle|y^2=2x-4\right\}=[2,+\infty)$，$B=\left\{x\middle|x^2-2x<15\right\}=(-3,5)$，所以 $A\cap B=[2,5)$.

2.【解析】由直线 a,b 不相交不能推出 $\alpha//\beta$；由 $\alpha//\beta$，可推出直线 a,b 不相交，故选 B.

3.【解析】由 $f(-x)=\dfrac{e^{-x}}{e^{-2x}-1}=\dfrac{e^x}{1-e^{2x}}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，$f(1)=\dfrac{e}{e^2-1}>0$，故选 A.

4.【解析】类比可得，点 (x_0,y_0,z_0) 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

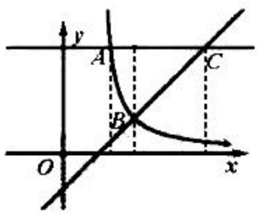
故 $d=4$，所以选 A.

5.【解析】由图可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$，$(3,5)$ 上递减，在 $(-1,3)$，$(5,+\infty)$ 上递增，故 $f(-1)<f(3)$.

6.【解析】设 2016 年到 2025 年每年投入资金分别为 $a_1,a_2,a_3,a_4,b_1,b_2,\cdots,b_6$，由已知 a_1,a_2,a_3,a_4 为等差数列，$a_1=120,a_4=150$，其和为 $S_1=a_1+a_2+a_3+a_4=540$. $b_1,b_2,\cdots,b_6$ 为等比数列，$b_1=150\times1.1$，公比 $q=1.1$，其和为 $S_2=b_1+b_2+\cdots+b_6=\dfrac{150\times1.1(1-1.1^6)}{1-1.1}=1650(1.1^6-1)$，又 $1.1^6\approx1+C_6^1 0.1+C_6^2 0.1^2+C_6^3 0.1^3\approx1.77$，$S_2\approx1270$.共投入资金大约为 1810 万元，故选 D.

7.【解析】封闭图形如图，计算得 $A\left(\dfrac{4}{3},3\right)$，$B(2,1)$，$C(3,3)$

$S=\dfrac{2}{3}\times3-\int_{\frac{4}{3}}^{2}\dfrac{1}{x-1}dx+\dfrac{1}{2}\times2\times2=4-\ln3$，故选 C.



8.【解析】由已知得 $\boldsymbol{a}=\left(\cos\dfrac{\pi}{3},\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$，

故 $\boldsymbol{b}=\left(\cos\dfrac{7\pi}{12},\sin\dfrac{7\pi}{12}\right)$，$\cos\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4},\sin\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$，故选 C.

9.【解析】由已知得 $ab=a+b+3$，即 $(a-1)(b-1)=4$，

$a+b=(a-1)+(b-1)+2\geq 2\sqrt{(a-1)(b-1)}+2=6$，当且仅当 $a=b=3$ 时取等号，故选 D.

10. 【解析】由 $S_m<S_{m+2}<S_{m+1}$ 得，$a_{m+1}>0$，$a_{m+2}<0$，$a_{m+1}+a_{m+2}>0$.

又 $S_{2m+1}=\dfrac{(2m+1)(a_1+a_{2m+1})}{2}=(2m+1)a_{m+1}>0$，

$S_{2m+3}=\dfrac{(2m+3)(a_1+a_{2m+3})}{2}=(2m+3)a_{m+2}<0$，

$S_{2m+2}=\dfrac{(2m+2)(a_1+a_{2m+2})}{2}=(m+1)(a_{m+1}+a_{m+2})>0$，故选 C.

11. 【解析】由已知 $f(x)=\sqrt{2}A\sin\left(\omega x+\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$，由图像可知取 $A=\sqrt{2}$，周期 $T=4\pi$，所以 $\omega=\dfrac{1}{2}$，

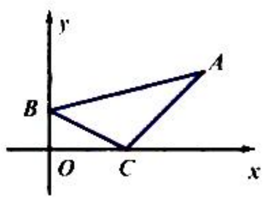
由 $f\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)=0$，及图像单调性知，取 $\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{6}$，$f(x)=2\sin\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，

$x\in[-\pi,2\pi]$，$\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{6}\in\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{7\pi}{6}\right]$，$f(x)$ 最小值为 $2\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$，故选 D.

12. 【解析】转为直线 $y=x-\ln a$ 与函数 $y=2\ln|x|$ 有三个交点．显然当 $x<0$ 时，有一个交点；当 $x>0$ 时，只需 $y=x-\ln a$ 与 $y=2\ln x$ 有两个交点即可．由 $y'=\dfrac{2}{x}=1$，得 $x=2$，$y=x-\ln a$ 与 $y=2\ln x$ 相切时，切点坐标为 $(2,2\ln 2)$，此时 $a=\dfrac{e^2}{4}$．当 $a\in\left(\dfrac{e^2}{4},+\infty\right)$ 时，$y=x-\ln a$ 与 $y=2\ln x$ 有两个交点，故选 B.

13.【答案】1【解析】由已知得 $\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=3$，解得 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$.所以 $\sin^2\alpha+\sin 2\alpha=\dfrac{\tan^2\alpha+2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=1$.

14. 【答案】2【解析】满足 $\begin{cases}x+2y\geq 2\\x-y\leq 2\\x-4y+4\geq 0\end{cases}$ 的可行域为 ΔABC 及其内部，



其中 $A(4,2)$.$B(0,1)$.$C(2,0)$，且 C 点为最优解，$z_{\max}=2$．

15. 【答案】7【解析】由题意可知，当 $x=0$ 时 $y=85$，即 $85=k+25$，$k=60$，故 $y=60\times 0.9085^x+25$．当 $y=55$ 时得：$55=60\times 0.9085^x+25$，

$x=\log_{0.9085}0.5=\dfrac{-\ln 2}{\ln 0.9085}\approx\dfrac{0.6931}{0.0960}\approx 7$．

16.【答案】 $\sqrt{7}$ 【解析】$6\overrightarrow{AP}=2\left(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}\right)+\left(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PC}\right)=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AP}^2=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right)^2=7$， 故$\left|\overrightarrow{PA}\right|=\sqrt{7}$.

17.【解析】(1) 当$n\geq 2$时， $S_{n-1}=2a_{n-1}-(n-1)^2$ ，又$a_n=S_n-S_{n-1}$

所以$a_n=2a_n-2a_{n-1}-2n+1$ ，故$a_n=2a_{n-1}+2n-1$ ……………………………………………2 分

所以$a_n+2n+3=2a_{n-1}+4n+2=2\left(a_{n-1}+2n+1\right)$ ……………………………………………4 分

又当$n=1$时，$2S_1=3a_1+1$，$S_1=a_1$ ，故$S_1=a_1=1$ ，所以$a_1+5=6$.

故数列$\left\{a_n+2n+3\right\}$是以6为首项，以2为公比的等比数列 ……………………………………………5 分

(2) 由(1)可知：$a_n+2n+3=3\times 2^n$，故$a_n=3\times 2^n-2n-3$ ……………………………6 分

$$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}$$
$$=\left(3\times 2-5\right)+\left(3\times 2^3-9\right)+\left(3\times 2^5-13\right)+\cdots+\left[3\times 2^{2n-1}-\left(4n+1\right)\right]$$
$$=\left(3\times 2+3\times 2^3+3\times 2^5+\cdots+3\times 2^{2n-1}\right)-\left[5+9+13+\cdots+\left(4n+1\right)\right]$$ ……………………………8 分

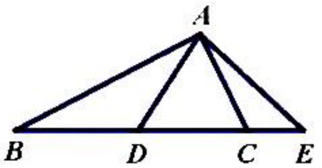
$$=\frac{6\left(1-4^n\right)}{1-4}-\frac{n}{2}\left[5+\left(4n+1\right)\right]=2^{2n+1}-2n^2-3n-2$$ ……………………………………………10 分

18. 【解析】(1) 在ΔABD中，正弦定理得：$\frac{AB}{\sin ADB}=\frac{BD}{\sin\alpha}$ ……………………………………………2 分

在ΔACD中，由正弦定理得：$\frac{AC}{\sin ADC}=\frac{CD}{\sin 2\alpha}$

由已知，$BD=CD$且$\sin ADB=\sin ADC$，

故$\frac{AB}{AC}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$ ……………………………………4 分



由$AB=\sqrt{3}AC$，$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$，所以$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又$\alpha\in\left(0,\pi\right)$，故$\alpha=\frac{\pi}{6}$，所以$\angle BAC=3\alpha=\frac{\pi}{2}$.

故ΔABC为直角三角形. ……………………………………………………………………6 分

(2) 由已知$AD=1$，所以$CD=BD=AD=AC=1$，$\angle ACE=\frac{2\pi}{3}$

设$CE=x$，则$AE=2x$ ，

在ΔACE中，由余弦定理得$AE^2=AC^2+CE^2-2AC\cdot CE\cos\frac{2\pi}{3}$ ……………………………9 分

整理得$12x^2-x-1=0$，解得$x=\dfrac{1}{3}$或$x=-\dfrac{1}{4}$（舍去）．

故$CE=\dfrac{1}{3}$，$BE=\dfrac{7}{3}$，$S_{\Delta ABE}=\dfrac{1}{2}AB\cdot BE\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{7\sqrt{3}}{12}$．……………………12 分

19.【解析】$f'(x)=6x^2-6(a^2-a+2)x+12(a^2-a)=6(x-2)(x-a^2+a)$ ……………2 分

由$f'(x)=0$，得$x=a^2-a$ 或$x=2$，由$a^2-a=2$，得$a=-1$ 或$a=2$

当$a=2$或$a=-1$时，$f'(x)=6(x-2)^2\geq 0$；……………………4 分

当$a<-1$或$a>2$时，$a^2-a>2$，$x\in(-\infty,2)\cup(a^2-a,+\infty)$，$f'(x)>0$；$x\in(2,a^2-a)$，$f'(x)<0$。

当$-1<a<2$ 时，$a^2-a<2$，$x\in(-\infty,a^2-a)\cup(2,+\infty)$，$f'(x)>0$；$x\in(a^2-a,2)$，$f'(x)<0$。

……………………………………8 分

故当$a=2$或$a=-1$时，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增；

当$a<-1$或$a>2$时，$f(x)$在$(-\infty,2)$,$(a^2-a,+\infty)$上单调递增，在$(2,a^2-a)$上单调递减；

当$-1<a<2$ 时，$f(x)$在$(-\infty,a^2-a)$,$(2,+\infty)$上单调递增，在$(a^2-a,2)$上单调递减。…………12 分

20.【解析】方案 1：由已知得：$OB=\cos\alpha,BC=\sin\alpha$，$OA=\dfrac{AD}{\tan 60^\circ}=\dfrac{BC}{\tan 60^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\alpha$

所以$AB=OB-OA=\cos\alpha-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\alpha$ ……………………1 分

设矩形$ABCD$的面积为S，则

$$S=AB\cdot BC=\left(\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\alpha\right)\sin\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{6}\cos 2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{6}$$ ……………………3 分

由$0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}$，得$\dfrac{\pi}{6}<2\alpha+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$，所以当$2\alpha+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，即$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$时，

矩形$ABCD$的最大面积为$S_1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$．……………………5 分

方案 2：由题意可知：$AB=2AE=2\sin\beta$，$OE=\cos\beta$，

又$OF=\dfrac{DF}{\tan 30^\circ}=\dfrac{AE}{\tan 30^\circ}=\sqrt{3}\sin\beta$，

$AD = EF = OE - OF = \cos\beta - \sqrt{3}\sin\beta$ ……6分

设矩形 $ABCD$ 的面积为 S，则

$S = AB \cdot AD = 2\sin\beta\left(\cos\beta - \sqrt{3}\sin\beta\right) = \sin 2\beta + \sqrt{3}\cos 2\alpha - \sqrt{3}$

$= 2\sin\left(2\beta + \dfrac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}$ ……8分

又 $0 < \beta < \dfrac{\pi}{6}$，得 $\dfrac{\pi}{3} < 2\beta + \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{2\pi}{3}$，所以当 $2\beta + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2}$，即 $\beta = \dfrac{\pi}{12}$ 时，

矩形 $ABCD$ 面积取最大为 $S_2 = 2 - \sqrt{3}$. ……10分

由于 $\left(\dfrac{7\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \dfrac{49}{12} > 4$，故 $\dfrac{7\sqrt{3}}{6} > 2$，即 $\dfrac{\sqrt{3}}{6} > 2 - \sqrt{3}$，故 $S_1 > S_2$

故应选择方案1，当 $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ 时，矩形 $ABCD$ 的面积最大为 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ ……12分

21.【解析】(1) 由已知 $F(x) = \ln(x+1) - \dfrac{ax}{x+1}$，定义域为 $(-1, +\infty)$.

$F'(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{a}{(x+1)^2} = \dfrac{x+1-a}{(x+1)^2}$. ……2分

由 $F'(x) = 0$，得 $x = a - 1$.

当 $a \le 0$ 时，$x \in (-1, +\infty), F'(x) > 0$，$F(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 单调递增无最小值.

当 $a > 0$ 时，$x \in (-1, a-1), F'(x) < 0$；$x \in (a-1, +\infty), F'(x) > 0$.

故 $F(x)_{\min} = F(a-1) = \ln a - a + 1$ ……4分

令 $\varphi(x) = \ln x - x + 1 \, (x > 0)$，$\varphi'(x) = \dfrac{1-x}{x} \, (x > 0)$.

$x \in (0,1), \varphi'(x) > 0; x \in (1, +\infty), \varphi'(x) < 0$，$\varphi(x)_{\max} = \varphi(1) = 0$

所以由 $\ln a - a + 1 = 0$，得 $a = 1$. ……6分

(2) 由 (1) 可知 $a = 1$，此时 $g(1) + g(2) + \cdots + g(n) + f(n) > n$ 等价于：

$\ln(n+1) > \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n+1}$ ……8分

由 (1) 可知当 $x > 0$ 时，$\ln(x+1) > \dfrac{x}{x+1}$.

故 $\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)>\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1}=\frac{1}{n+1}$，即 $\ln(n+1)-\ln n>\frac{1}{n+1}$ ……10 分

所以 $\ln(n+1)=(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\cdots+\left[\ln(n+1)-\ln n\right]>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}$

故 $g(1)+g(2)+\cdots+g(n)+f(n)>n$ ……12 分

22.【解析】(1) 设切点坐标为 (x_0,y_0)，因为 $f'(x)=\frac{1}{x+n}$， ……2 分

所以 $\frac{1}{x_0+n}=1$，又 $y_0=\ln(x_0+n)$，所以 $y_0=0$，

故 $x_0=y_0=0$，所以 $n=1$ ……4 分

(2) 存在 $x_0\ge 0$，使 $f(x_0)>e^{2x_0}-x_0^2$ 成立，

等价于：存在 $x_0\ge 0$，使 $e^{2x_0}-\ln(x_0+n)-x_0^2<0$ 成立.

令 $g(x)=e^{2x}-\ln(x+n)-x^2\ (x\ge 0)$，$g'(x)=2e^{2x}-\frac{1}{x+n}-2x$

令 $h(x)=g'(x)=2e^{2x}-\frac{1}{x+n}-2x$，$h'(x)=4e^{2x}+\frac{1}{(x+n)^2}-2$

当 $x\ge 0$ 时，$h'(x)>0$，故 $h(x)=g'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递增，

所以 $g'(x)\ge g'(0)=2-\frac{1}{n}$ ……6 分

①当 $n\ge\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)\ge 2-\frac{1}{n}\ge 0$，故 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递增，

所以 $g(x)\ge g(0)=1-\ln n$，由已知 $1-\ln n<0$，即 $n>e$ ……8 分

②当 $n<\frac{1}{2}$ 时，$g'(0)=2-\frac{1}{n}<0$

故存在 $x_1\in(0,+\infty)$，使得 $g'(x_1)=0$ 此时 $\frac{1}{x_1+n}=2e^{2x_1}-2x_1$.

若 $x\in(0,x_1)$ 时，$g'(x)<0$；若 $x\in(x_1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$.

所以 $g(x)_{\min}=g(x_1)=e^{2x_1}-\ln(x_1+n)-x_1^2=\left(e^{2x_1}-x_1^2\right)+\ln\left(2e^{2x_1}-2x_1\right)$ ……10 分

令 $\varphi_1(x)=e^{2x}-x^2\ (x>0)$，$\varphi_1'(x)=2e^{2x}-2x$，$\varphi_1''(x)=4e^{2x}-2>0$，

所以 $\varphi_1'(x)=2e^{2x}-2x$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，所以 $\varphi_1'(x)>\varphi_1'(0)=2>0$；

所以$\varphi_1(x)>\varphi_1(0)=1>0$，故$e^{2x_1}-x_1^2>0$.

令$\varphi_2(x)=e^{2x}-x(x>0)$，$\varphi_2'(x)=2e^{2x}-1>0$，故$\varphi_2(x)$在$(0,+\infty)$单调递增

所以$\varphi_2(x)>\varphi_2(0)=1$，故$\ln\left(2e^{2x_1}-2x_1\right)>\ln 2>0$

故不存在$x_0\geq 0$，使$e^{2x_0}-\ln(x_0+n)-x_0^2<0$成立.

综合上述：实数n的取值范围是$(e,+\infty)$. ……………………………………………………12 分

关于我们