

★启用前绝密(3月18日)

分宜中学 玉山一中 临川一中  
2021年江西省 南城一中 南康中学 高安中学 高三联合考试  
彭泽一中 泰和中学 樟树中学  
数学试卷(理科)

命题:泰和中学、南康中学、樟树中学

注意事项:

- 1 本试卷分第I卷(选择题)和第II卷(非选择题)两部分,满分150分,考试时间为120分钟.
- 2 本试卷分试题卷和答题卷,第I卷(选择题)的答案应填在答题卷卷首相应的空格内,做在第I卷的无效.
- 3 答题前,考生务必将自己的姓名、准考证号填涂在答题卡相应的位置.

第I卷(选择题)

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分,在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求的.

1. 已知集合  $A = \{x | \log_2 x < 1\}$ ,  $B = \{x | x^2 < 1\}$ , 则  $A \cap B = ( \quad )$

- A.  $(-1, 1)$       B.  $(-1, 2)$       C.  $(0, 1)$       D.  $(0, 2)$

2. 复数  $z$  满足:  $z(1+i) = |1-i|$ , 则复数  $z$  的实部是( )

- A.  $-1$       B.  $1$       C.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$       D.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. 在  $\triangle ABC$  中,  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$ ,  $AB = 4$ ,  $AC = 3$ , 则  $\overrightarrow{BC}$  在  $\overrightarrow{CA}$  方向上的投影为( )

- A.  $3$       B.  $5$       C.  $-3$       D.  $-4$

4. 已知定义在  $R$  上的奇函数  $f(x)$  满足:  $f(x) = f(x-6)$ , 且当  $0 \leq x < 3$  时,

$f(x) = \begin{cases} a + \log_{0.5}(x+1) & (0 \leq x \leq 1) \\ x \cdot (x-2) & (1 < x < 3) \end{cases}$  ( $a$  为常数), 则  $f(2020) + f(2021)$  的值为( )

- A.  $-2$       B.  $-1$       C.  $0$       D.  $1$

5. 设  $(2x^2 - \frac{17}{x})^6 = a_0x^{m_0} + a_1x^{m_1} + a_2x^{m_2} + \dots + a_6x^{m_6}$ , 则  $m_0 + m_1 + m_2 + \dots + m_6 = ( \quad )$

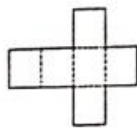
- A.  $21$       B.  $64$       C.  $78$       D.  $15^6$

6. 设  $a = \log_2 6$ ,  $b = \log_3 12$ ,  $c = \log_3 15$ , 则( )

- A.  $a < b < c$       B.  $c < b < a$       C.  $b < a < c$       D.  $c < a < b$

7. 如图是一个正方体纸盒的展开图, 把1,1,2,2,3,3分别填入小正方形后, 按虚线折成正方体, 则所得到的正方体相对面上的两个数都相等的概率是( )

- A.  $\frac{4}{15}$       B.  $\frac{1}{6}$       C.  $\frac{1}{15}$       D.  $\frac{1}{20}$



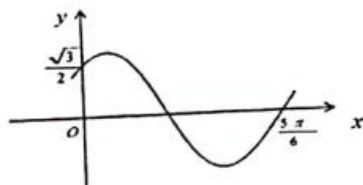
8. 已知函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图象如图所示, 则关于函数  $f(x)$  下列说法正确的是( )

A.  $f(x)$  的图象关于直线  $x = \frac{\pi}{6}$  对称

B.  $f(x)$  的图象关于点  $(\frac{\pi}{4}, 0)$  对称

C.  $f(x)$  在区间  $[-\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{6}]$  上是增函数

D. 将  $y = \sin 2x$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度可以得到  $f(x)$  的图象



9. 已知正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  和空间任意直线  $l$ , 若直线  $l$  与直线  $AB$  所成的角为  $\alpha_1$ , 与直线  $CC_1$  所成的角为  $\alpha_2$ , 与平面  $ABCD$  所成的角为  $\beta_1$ , 与平面  $ACC_1A_1$  所成的角为  $\beta_2$ , 则( )

- A.  $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$       B.  $\alpha_1 + \alpha_2 \geq \frac{\pi}{2}$       C.  $\beta_1 + \beta_2 = \frac{\pi}{2}$       D.  $\beta_1 + \beta_2 \geq \frac{\pi}{2}$

10. 点  $O$  为坐标原点, 若  $A, B$  是圆  $x^2 + y^2 = 16$  上的两个动点, 且  $\angle AOB = 120^\circ$ , 点  $P$  在直线  $3x + 4y + 25 = 0$  上运动, 则  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$  的最小值是( )

- A. -3      B. -4      C. -5      D. -6

11. 关于  $x$  的方程  $e^x - \frac{\ln x + k}{x} = 1$  在  $(0, +\infty)$  上只有一个实根, 则实数  $k =$  ( )

- A.  $e-1$       B. 1      C. 0      D.  $e$

12. 设函数  $y = f(x)$  的图像由方程  $\frac{x|x|}{4} + \frac{y|y|}{2} = 1$  确定, 对于函数  $f(x)$  给出下列命题:

$P_1: \forall x_1, x_2 \in R, x_1 \neq x_2$ , 恒有  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$  成立

$P_2: y = f(x)$  的图像上存在一点  $P$ , 使得  $P$  到原点的距离小于  $\sqrt{2}$

$P_3: \text{对于 } \forall x \in R, 2f(x) + x > 0 \text{ 恒成立}$

则下列正确的是( )

- A.  $P_1 \wedge P_2$       B.  $P_1 \wedge P_3$       C.  $\neg P_2 \vee P_3$       D.  $\neg P_1 \vee P_3$

## 第 II 卷 (非选择题)

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知随机变量  $\xi$  服从正态分布  $N(3, \sigma^2)$ ,  $P(\xi \leq 6) = 0.84$ , 则  $P(\xi \leq 0) =$  \_\_\_\_\_.

14. 已知离心率为 2 的双曲线  $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的右焦点  $F$  与抛物线  $C_2$  的焦点重合,  $C_1$  的中心与  $C_2$  的顶点重合,  $M$  是  $C_1$  与  $C_2$  的公共点, 若  $|MF| = 5$ , 则  $C_1$  的标准方程为 \_\_\_\_\_.

15. 已知  $a, b, c$  分别为  $\triangle ABC$  三个内角  $A, B, C$  的对边, 角  $A, B, C$  成等差数列, 且  $b = 4$ . 若  $D, E$  分别为边  $AC, AB$  的中点, 且  $G$  为  $\triangle ABC$  的重心, 则  $\triangle GDE$  面积的最大值为 \_\_\_\_\_.

16. 已知三棱锥  $A-BCD$ ,  $AB = AD = BC = CD = 5, BD = 8, AC = 3$ , 则以点  $C$  为球心,  $2\sqrt{2}$  为半径的球面与侧面  $ABD$  的交线长为 \_\_\_\_\_.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17 ~ 21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题共 60 分

17. (本小题满分 12 分)

已知  $\{a_n\}$  是公差不为零的等差数列,  $a_1 = 1$ , 且  $a_1, a_3, a_9$  成等比数列.

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 设  $b_n = \tan a_n \cdot \tan a_{n+1}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .



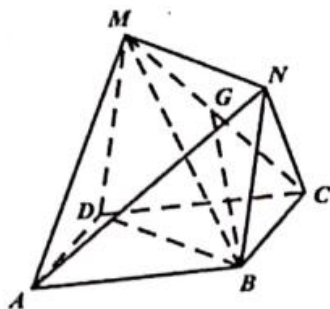
18. (本小题满分 12 分)

如图, 平面  $ABCD \perp$  平面  $DBNM$ , 且菱形  $ABCD$  与菱形  $DBNM$  全等, 且  $\angle MDB = \angle DAB$ ,

$G$  为  $MC$  中点.

(1) 求证:  $GB \parallel$  平面  $AMN$ ;

(2) 求二面角  $A-MN-B$  的余弦值.



19. (本小题满分 12 分)

已知正三角形  $ABC$ , 某同学从  $A$  点开始, 用掷骰子的方法移动棋子. 规定: ①每掷一次骰子, 把一枚棋子从三角形的一个顶点移动到另一个顶点; ②棋子移动的方向由掷骰子决定, 若掷出骰子的点数大于 3, 则按逆时针方向移动; 若掷出骰子的点数不大于 3, 则按顺时针方向移动. 设掷骰子  $n$  次时, 棋子移动到  $A, B, C$  处的概率分别为:

$P_n(A), P_n(B), P_n(C)$ , 例如: 掷骰子一次时, 棋子移动到  $A, B, C$  处的概率分别为  $P_1(A) = 0, P_1(B) = \frac{1}{2},$

$P_1(C) = \frac{1}{2}$

(1) 掷骰子三次时, 求棋子分别移动到  $A, B, C$  处的概率  $P_3(A), P_3(B), P_3(C)$ ;

(2) 记  $P_n(A) = a_n, P_n(B) = b_n, P_n(C) = c_n$  其中  $a_n + b_n + c_n = 1, b_n = c_n$  求  $a_8$ .

20. (本小题满分 12 分)

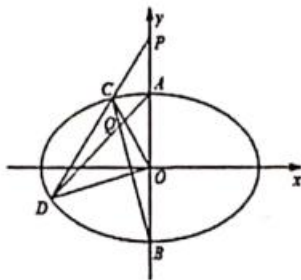
已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的焦距为  $2\sqrt{2}$ , 点  $P(0, 2)$  关于直线  $y = x$  的对称点在椭圆  $E$  上.

(1) 求椭圆  $E$  的方程;

(2) 如图, 椭圆  $E$  的上、下顶点分别为  $A, B$ , 过点  $P$  的直线  $l$  与椭圆  $E$  相交于两个不同的点  $C, D$ .

① 求  $\triangle COD$  面积的最大值;

② 当  $AD$  与  $BC$  相交于点  $Q$  时, 试问: 点  $Q$  的纵坐标是否是定值? 若是, 求出该定值; 若不是, 说明理由.



21. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = 2x - a \ln x + 4a, (a \in R)$

(1) 讨论函数  $f(x)$  的单调性;

(2) 令  $g(x) = f(x) - \sin x$ , 若存在  $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ , 且  $x_1 \neq x_2$  时,  $g(x_1) = g(x_2)$  证明:  $x_1 x_2 < a^2$ .

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 2\cos\alpha - 2\sin\alpha \\ y = \cos\alpha + \sin\alpha \end{cases}$  ( $\alpha$  为参数). 以坐标原点  $O$  为极

点,  $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系, 直线  $l$  的极坐标方程为  $\rho\sin(\frac{3\pi}{4} - \theta) = 4\sqrt{2}$ .

(1) 求曲线  $C$  和直线  $l$  的直角坐标方程;

(2) 过原点  $O$  引一条射线分别交曲线  $C$  和直线  $l$  于  $A, B$  两点, 求  $\frac{1}{|OA|^2} + \frac{8}{|OB|^2}$  的最大值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲]

已知函数  $f(x) = |x - a| + |x + 2a|$ .

(1) 若  $a = 1$ , 求不等式  $f(x) \leq 4 - x^2$  的解集;

(2) 已知  $m + n = 2$ , 若对任意  $x \in \mathbb{R}$ , 都存在  $m > 0, n > 0$ , 使得  $f(x) = \frac{4m^2 + 2n}{mn}$ , 求实数  $a$  的取值范围.

★启用前绝密(3月18日)

分宜中学 玉山一中 临川一中  
**2021年江西省** 南城一中 南康中学 高安中学 **高三联合考试**

彭泽一中 泰和中学 樟树中学

**数学试卷(理科)参考答案**

命题: 泰和中学、南康中学、樟树中学

注意事项:

- 1 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分. 满分 150 分. 考试时间为 120 分钟.
- 2 本试卷分试题卷和答题卷, 第 I 卷(选择题)的答案应填在答题卷卷首相应的空格内, 做在第 I 卷的无效.
- 3 答题前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填涂在答题卡相应的位置.

一、选择题(每小题 5 分, 共 60 分)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	D	C	D	A	B	C	C	B	A	B	C

二、填空题(每小题 5 分, 共 20 分)

13. 0.16    14.  $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$     15.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$     16.  $\sqrt{5}\pi$

三、解答题(本大题共 70 分)

17. 解: (1)  $\because a_1 = 1, a_1, a_3, a_9$  成等比数列  $\therefore (a_3)^2 = a_1 \cdot a_9$  ... 2 分

即  $(1+2d)^2 = 1+8d$  解得  $d = 1$  或  $d = 0$  (舍去) ... 4 分

故  $\{a_n\}$  的通项为  $a_n = 1 + (n-1) \times 1 = n$  ... 5 分

(2)  $b_n = \tan n \cdot \tan(n+1) = \frac{\tan(n+1) - \tan n}{\tan 1} - 1$  ... 8 分

$\therefore S_n = \frac{1}{\tan 1} [\tan 2 - \tan 1 + \tan 3 - \tan 2 + \dots + \tan(n+1) - \tan n] - n$   
 $= \frac{1}{\tan 1} [\tan(n+1) - \tan 1] - n = \frac{\tan(n+1)}{\tan 1} - (n+1)$  ... 12 分

18. 解: (1) 证明: 连接 AC, 交 DB 于 E, 连接 GE,

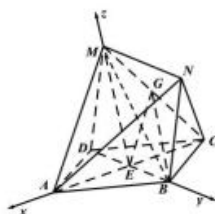
在  $\triangle AMC$  中, G, E 分别是 CM, CA 中点,  $\therefore GE \parallel AM \therefore GE \not\subset$  平面 AMN

$AM \subset$  平面 AMN,  $\therefore GE \parallel$  平面 AMN ... 2 分

又菱形 DBNM 中,  $MN \parallel BE$ , 同理可证  $BE \parallel$  平面 AMN

又  $\because BE \cap GE = E$ ,  $\therefore$  平面 GBE  $\parallel$  平面 AMN ... 4 分

又  $\because GB \subset$  平面 GBE,  $\therefore GB \parallel$  平面 AMN ... 5 分



2021年江西省九所重点中学高三联合考试(数学(理科)) 第 7 页

(2) 连接  $ME$ ，由菱形  $ABCD$  与菱形  $DBNM$  全等且  $\angle MDB = \angle DBA$ ，  
可得出  $AD = AB = BD$ ， $DM = BD = MB$ 。

$\therefore ME \perp BD$ ，又  $\because$  平面  $ABCD \perp$  平面  $MNBD$

且平面  $ABCD \cap$  平面  $MNBD = BD \therefore ME \perp$  平面  $ABCD$  ... 7 分

则以  $EA$  为  $x$  轴， $EB$  为  $y$  轴， $EM$  为  $z$  轴，建立空间直角坐标系，

令  $AB = 2$ ，则  $A(\sqrt{3}, 0, 0)$ ， $D(0, -1, 0)$ ， $M(0, 0, \sqrt{3})$ ， $B(0, 1, 0)$ ， $N(0, 2, \sqrt{3})$ ，

设平面  $AMN$  的一个法向量为  $\vec{n} = (x, y, z)$ ，则由  $\begin{cases} \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\ \vec{AN} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}$  得  $\begin{cases} -\sqrt{3}x + \sqrt{3}z = 0 \\ -\sqrt{3}x + 2y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases}$ ，

则可令  $x = 1$ ，得  $y = 0$ ， $z = 1$ ，平面  $AMN$  的一个法向量为  $\vec{n} = (1, 0, 1)$ ，... 9 分

$x$  轴  $\perp$  平面  $BMN$ ，可设平面  $BMN$  的一个法向量为  $\vec{m} = (1, 0, 0)$  ... 10 分

设二面角  $A-MN-B$  的平面角为  $\theta$ ， $\therefore |\cos \theta| = |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

又  $\because$  二面角  $A-MN-B$  为锐二面角， $\therefore$  二面角  $A-MN-B$  的余弦值为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  ... 12 分

19. 解(1)  $P_3(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ，

$P_3(B) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$   $P_3(C) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$  ... 4 分

(2)  $\because b_n = c_n$ ，即  $b_{n-1} = c_{n-1}$ ， $n \geq 2$ ，又  $b_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + c_{n-1})$

$\therefore n \geq 2$  时  $b_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + c_{n-1}) = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1})$

又  $\because a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} = 1$ ，可得  $2b_n + b_{n-1} = 1$  ... 7 分

由  $b_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}b_{n-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}(b_{n-1} - \frac{1}{3})$  可得

数列  $\{b_n - \frac{1}{3}\}$  是首项为  $\frac{1}{6}$  公比为  $-\frac{1}{2}$  的等比数列

$b_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \cdot (-\frac{1}{2})^{n-1}$ ，即  $b_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^{n-1}$  ... 10 分

又  $a_n = 1 - 2b_n = 1 - 2[\frac{1}{3} + \frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^{n-1}] = \frac{1}{3}[1 - (-\frac{1}{2})^{n-1}]$

故  $a_8 = \frac{43}{128}$  ... 12 分



20. 解: (1) 因为点  $P(0,2)$  关于直线  $y=x$  的对称点为  $(2,0)$ ,

且  $(2,0)$  在椭圆  $E$  上, 所以  $a=2$ , 又  $2c=2\sqrt{2} \therefore c=\sqrt{2}$ ,

则  $b^2 = a^2 - c^2 = 4 - 2 = 2$ , 所以椭圆  $E$  的方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$  ... 3 分

(2) ① 设直线  $l$  的方程为  $y=kx+2$ ,  $C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$ , 点  $O$  到直线  $l$  的距离为  $d$ .

$$\begin{cases} y = kx + 2 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 整理得: } (1+2k^2)x^2 + 8kx + 4 = 0,$$

由  $\Delta > 0$ , 可得  $k^2 > \frac{1}{2}$ , 且  $x_1 + x_2 = -\frac{8k}{1+2k^2}, x_1x_2 = \frac{4}{1+2k^2}$  ... 6 分

$$\therefore S_{\Delta COD} = \frac{1}{2}|CD| \cdot d = \frac{1}{2}\sqrt{1+k^2}|x_1 - x_2| \cdot \frac{2}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{4\sqrt{2k^2-1}}{1+2k^2}$$

$$\text{设 } t = \sqrt{2k^2-1} (t > 0), \text{ 则 } S_{\Delta COD} = \frac{4t}{t^2+2} = \frac{4}{t+\frac{2}{t}} \leq \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

当且仅当  $t = \sqrt{2}$  即  $k = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$  时等号成立

$\therefore \Delta COD$  的面积的最大值为  $\sqrt{2}$  ... 8 分

$$\text{② 由题意得, } AD: y = \frac{y_2 - \sqrt{2}}{x_2}x + \sqrt{2}, BC: y = \frac{y_1 + \sqrt{2}}{x_1}x - \sqrt{2},$$

$$\text{联立方程组, 消去 } x \text{ 得 } y = \frac{2\sqrt{2}kx_1x_2 + 2\sqrt{2}(x_1+x_2) + 2(x_2-x_1)}{2(x_2-x_1) + \sqrt{2}(x_1+x_2)}, \dots 10 \text{ 分}$$

又  $\because x_1 + x_2 = -2kx_1x_2$ , 解得  $y=1$

故点  $Q$  的纵坐标为定值 1. ... 12 分

21. 解: (1)  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$

$$f'(x) = 2 - \frac{a}{x} = \frac{2x-a}{x} \quad \text{当 } a \leq 0 \text{ 时 } f'(x) > 0,$$

当  $a > 0$  时, 由  $f'(x) > 0$  得  $x > \frac{a}{2}$ , 由  $f'(x) < 0$  得  $0 < x < \frac{a}{2}$ ,

$\therefore$  当  $a \leq 0$  时,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增

当  $a > 0$ , 时  $f(x)$  在  $(0, \frac{a}{2})$  上单调递减, 在  $(\frac{a}{2}, +\infty)$  单调递增. ... 4 分

$$(2) g(x) = 2x - a \ln x - \sin x + 4a$$

$$\because g(x_1) = g(x_2) \therefore 2x_1 - a \ln x_1 - \sin x_1 = 2x_2 - a \ln x_2 - \sin x_2$$

$$\therefore a(\ln x_1 - \ln x_2) = 2(x_1 - x_2) - (\sin x_1 - \sin x_2)$$

令  $h(x) = x - \sin x$ , 则  $h'(x) = 1 - \cos x \geq 0 \therefore h(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增

不妨设  $x_1 > x_2 > 0$ ,  $\therefore h(x_1) > h(x_2)$ ,  $\therefore x_1 - \sin x_1 > x_2 - \sin x_2$

$$\therefore -(\sin x_1 - \sin x_2) > x_2 - x_1, \therefore 2(x_1 - x_2) - (\sin x_1 - \sin x_2) > 2(x_1 - x_2) + (x_2 - x_1) = x_1 - x_2$$

$$\therefore a(\ln x_1 - \ln x_2) > x_1 - x_2 \therefore a > \frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} \quad \dots 8 \text{ 分}$$

下面证明  $\frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} > \sqrt{x_1 x_2}$

令  $t = \frac{x_1}{x_2} (t > 1)$ , 只需证  $\frac{t-1}{\ln t} > \sqrt{t}$ , 只需证  $\frac{t-1}{\sqrt{t}} - \ln t > 0$ ,

设  $m(t) = \frac{t-1}{\sqrt{t}} - \ln t (t > 1)$ , 则  $m'(t) = \frac{(\sqrt{t}-1)^2}{2t\sqrt{t}} > 0$ ,  $\therefore m(t)$  在  $(1, +\infty)$  递增  $\therefore m(t) > m(1) = 0$

即  $\frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} > \sqrt{x_1 x_2}$  成立

$$\therefore a > \sqrt{x_1 x_2} \quad \text{即 } x_1 x_2 < a^2 \quad \dots 12 \text{ 分}$$

22. 解(1) 由曲线  $C$  的参数方程得:

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = (\cos \alpha - \sin \alpha)^2 + (\cos \alpha + \sin \alpha)^2 = 2$$

$$\therefore \text{曲线 } C \text{ 的直角坐标方程为 } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1. \quad \dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{又由 } \rho \sin(\frac{3\pi}{4} - \theta) = 4\sqrt{2}, \quad \rho \cos \theta + \rho \sin \theta = 8,$$

将  $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ , 代入上式,

得直线  $l$  的直角坐标方程为  $x + y - 8 = 0$ . ... 4 分

(2) 在极坐标系内, 可设  $A(\rho_1, \theta), B(\rho_2, \theta)$ ,

$$\text{则 } \frac{\rho_1^2 \cos^2 \theta}{8} + \frac{\rho_1^2 \sin^2 \theta}{2} = 1, \quad \rho_2 \cos \theta + \rho_2 \sin \theta = 8 \quad \dots 6 \text{ 分}$$

$$\frac{1}{|OA|^2} + \frac{8}{|OB|^2} = \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{8}{\rho_2^2} = \frac{\cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta + 1 + \sin 2\theta}{8} \quad \dots 8 \text{ 分}$$

$$= \frac{7 + \sqrt{13} \sin(2\theta - \varphi)}{16} \leq \frac{7 + \sqrt{13}}{16}$$

(当  $\sin(2\theta - \varphi) = 1$  时取等号, 符合题意)

$$\therefore \frac{1}{|OA|^2} + \frac{8}{|OB|^2} \text{ 的最大值为 } \frac{7 + \sqrt{13}}{16} \quad \dots 10 \text{ 分}$$

23. 解: (1) 当  $a = 1$  时, 不等式  $f(x) \leq 4 - x^2$  即为  $|x - 1| + |x + 2| \leq 4 - x^2$  ①

当  $x < -2$  时, ①化为  $x^2 - 2x - 5 \leq 0$  无解,

当  $-2 \leq x \leq 1$  时 ①化为  $x^2 \leq 1$  从而  $-1 \leq x \leq 1$

当  $x > 1$  时 ①化为  $x^2 + 2x - 3 \leq 0$  无解

$\therefore$  原不等式的解集为  $\{x | -1 \leq x \leq 1\}$  ... 5 分

$$(2) f(x) = |x - a| + |x + 2a| \geq |(x - a) - (x + 2a)| = 3|a|$$

$$\frac{4m^2 + 2n}{mn} = \frac{4m}{n} + \frac{2}{m} = \frac{4m}{n} + \frac{m+n}{m} = \frac{4m}{n} + \frac{n}{m} + 1 \geq 2\sqrt{\frac{4m}{n} \cdot \frac{n}{m}} + 1 = 5$$

当且仅当  $2m = n$ , 即  $m = \frac{2}{3}, n = \frac{4}{3}$  时等号成立

$\therefore 5 \leq 3|a|, \therefore a \leq -\frac{5}{3}$  或  $a \geq \frac{5}{3}, \therefore a$  的取值范围为  $(-\infty, -\frac{5}{3}] \cup [\frac{5}{3}, +\infty)$  ... 10 分

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》