2024届新高三开学摸底考试卷（新高考专用）01
数学

（考试时间：120 分钟　试卷满分：150 分）

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．设集合 $A=\{-2,-1,0,1\}$，$B=\{x|x^2<1\}$，则 $A\cap(C_RB)=$（　　）

A. $\{-2,-1,1\}$　　B. $\{-2,0,1\}$

C. $\{-2,-1\}$　　D. $\{-1,1\}$

2．已知复数 $z=1+i$，$\bar{z}$ 为 z 的共轭复数，则 $\left|\frac{\bar{z}+1}{z}\right|=$（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $\frac{\sqrt{10}}{2}$　　D. $\sqrt{10}$

3．已知向量 $\vec{a}=(1,2),\vec{b}=(-1,3)$，且 $(m\vec{a}+n\vec{b})\perp\vec{b}$，则 $\frac{m}{n}=$（　　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. -2

4. 已知函数 $f(x)=\log_a(6-ax)(a>0$，且 $a\neq1)$在$(0,2)$上单调递减，则实数 a 的取值范围是(　　)

A．$(1,3]$　　B．$(1,3)$

C．$(0,1)$　　D．$(1,+\infty)$

5．椭圆 $x^2+my^2=1$ 的焦点在 y 轴上，长轴长是短轴长的 2 倍，则 m 的值为（　　）

A. 2　　B. 4　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{4}$

6．已知直线 $l: x+ay-1=0$ 是圆 C：$x^2+y^2-6x-2y+1=0$ 的对称轴，过点 $A(-1,a)$ 作圆 C 的一条切线，切点为 B，则$|AB|=$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

7. 等比数列$\{a_n\}$的公比为q，前n项和为S_n，设甲：$q>0$，乙：$\{S_n\}$是递增数列，则（　　）

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

8. 已知$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos\alpha=\frac{1}{3}$，则$\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$等于（　　）

A.$\frac{2}{3}$　B.$\frac{2}{9}$　C. $-\frac{1}{9}$　D. $-\frac{7}{9}$

二、多选题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 维生素C又叫抗坏血酸，是一种水溶性维生素，是高等灵长类动物与其他少数生物的必需营养素，现从猕猴桃、柚子两种食物中测得每100克维生素C的含量（单位：mg），得到数据如下.则下列说法不正确的是（）

猕猴桃	102	104	106	107	113	116	119	121	132	134
柚子	109	113	114	116	117	121	121	122	131	132

A. 每100克柚子维生素C含量的众数为121

B. 每100克柚子维生素C含量的75%分位数为121

C. 每100克猕猴桃维生素C含量的平均数高于每100克柚子维生素C含量的平均数

D. 每100克猕猴桃维生素C含量的方差高于每100克柚子维生素C含量的方差

10. 牛顿曾提出了物体在常温环境下温度变化的冷却模型：若物体初始温度是θ_0（单位：°C），环境温度是θ_1（单位：°C），其中$\theta_0>\theta_1$则经过t分钟后物体的温度θ将满足$\theta=f(t)=\theta_1+(\theta_0-\theta_1)\cdot e^{-kt}$（$k\in R$且$k>0$）.现有一杯80°C的热红茶置于20°C的房间里，根据这一模型研究红茶冷却情况，下列结论正确的是（　　）（参考数值$\ln2\approx0.7$）

A. 若$f(3)=50°C$，则$f(6)=35°C$

B. 若$k=\frac{1}{10}$，则红茶下降到50°C所需时间大约为7分钟

C. 若$f'(3)=-5$，则其实际意义是在第3分钟附近，红茶温度大约以每分钟5°C的速率下降

D．红茶温度从80°C下降到60°C所需的时间比从60°C下降到40°C所需的时间多

11．已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f'(x)\left[2f(x)+1\right]>0$，则下列结论正确的有（）

A. 若 $a<b$，则 $\left[f(a)-f(b)\right]\left[f(a)+f(b)+1\right]>0$

B. 若 $a>b$，则 $\left[f(a)-f(b)\right]\left[f(a)+f(b)+1\right]>0$

C. 若 $f(x)$ 是增函数，则 $\left[f(x)\right]^2$ 是减函数

D. 若 $f(x)$ 是减函数，则 $\left[f(x)\right]^2$ 是增函数

12．我们把所有棱长都相等的正棱柱（锥）叫"等长正棱柱（锥）"，而与其所有棱都相切的称为棱切球，设下列"等长正棱柱（锥）"的棱长都为1，则下列说法中正确的有（　　）

A.正方体的棱切球的半径为 $\sqrt{2}$

B.正四面体的棱切球的表面积为 $\frac{\pi}{2}$

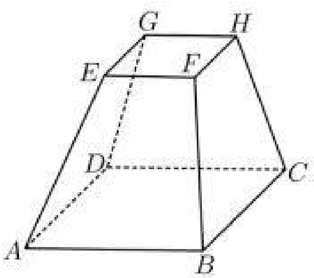
C.等长正六棱柱的棱切球的体积为 $\frac{4\pi}{3}$

D.等长正四棱锥的棱切球被棱锥5个面（侧面和底面）截得的截面面积之和为 $\frac{7\pi}{12}$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．现从4名男志愿者和3名女志愿者中，选派2人分别去甲、乙两地担任服务工作，若被选派的人中至少有一名男志愿者，则不同的选派方法共有________种.(用数字作答)

14．《九章算术》中将正四棱台体（棱台的上下底面均为正方形）称为方亭.如图，现有一方亭 $ABCD-EFHG$，其中上底面与下底面的面积之比为 $1:4$，$BF=\frac{\sqrt{6}}{2}EF$，方亭的四个侧面均为全等的等腰梯形，已知方亭四个侧面的面积之和为 $12\sqrt{5}$，则方亭的体积为______.



15．设函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上恰有三个极值点、两个零点，则 ω 的取值范围是________

16．已知 F 为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点，A、B 是双曲线 C 的一条渐近线上关于原点对称的两点，$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BF}=0$ 且线段 AF 的中点在双曲线 C 上，则双曲线 C 的离心率 $e=$____.

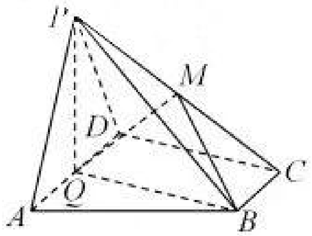
四、解答题：共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．记△ABC的内角A、B、C的对边分别为a、b、c，且 $\frac{c}{a}=\frac{\sin A+2\sin B\cos A}{2\sin A}$．

（1）求B的大小；

（2）若 $b=2\sqrt{2}$，△ABC的面积为$2\sqrt{3}$，求△ABC的周长．

18．如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为直角梯形,$AD//BC$,$\angle ADC=90°$,平面 $PAD\perp$ 底面 $ABCD$，Q 为 AD 的中点，M 是棱 PC（不与端点重合）上的点,$PA=PD=2$,$BC=\frac{1}{2}AD=1$,$CD=\sqrt{3}$.



(1)求证:平面 $PBC\perp$平面 PQB；

(2)当 PM 的长为何值时,平面 QMB 与平面 PDC 所成的角的大小为$60°$？

19．已知函数 $f(x)=e^x-ax-a$，$a\in\mathbf{R}$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性；

(2)当 $a=1$ 时，令 $g(x)=\frac{2f(x)}{x^2}$.证明：当 $x>0$ 时，$g(x)>1$.

20．已知数列$\{a_n\}$是以 d 为公差的等差数列，$d\neq 0,S_n$ 为$\{a_n\}$的前 n 项和.

(1)若 $S_6-S_3=6,a_3=1$，求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若$\{a_n\}$中的部分项组成的数列$\{a_{m_n}\}$是以 a_1 为首项，4 为公比的等比数列，且 $a_2=4a_1$，求数列$\{m_n\}$的前 n 项和 T_n.

21．甲、乙两选手进行一场体育竞技比赛，采用 $2n-1$ 局 n 胜制$\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$

的比赛规则，即先赢下 n 局比赛者最终获胜．已知每局比赛甲获胜的概率为 p，乙获胜的概率为 $1-p$，比赛结束时，甲最终获胜的概率为 $P_n\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$．

(1)若 $p=\frac{1}{2}, n=2$，结束比赛时，比赛的局数为 X，求 X 的分布列与数学期望；

(2)若采用 5 局 3 胜制比采用 3 局 2 胜制对甲更有利，即 $P_3>P_2$．

(i)求 p 的取值范围；

(ii)证明数列 $\{P_n\}$ 单调递增，并根据你的理解说明该结论的实际含义．

22.已知圆 $F_2:(x-1)^2+y^2=16$，定点 $F_1(-1,0)$．M 是圆 F_2 上的一动点，线段 F_1M 的垂直平分线交半径 F_2M 于点 P．

(1)求 P 的轨迹 Q 的方程；

(2)若过 F_1,F_2 的直线 l_1,l_2 分别交轨迹 Q 与 A,C 和 B,D，且直线 l_1,l_2 的斜率之积为 $-\frac{3}{4}$，求四边形 $ABCD$ 面积的取值范围．