

山东普高大联考 10 月联合质量测评试题

高二数学

2023.10

本卷满分 150 分，考试时间 120 分钟

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的学校、班级、姓名、考号、座号填涂在相应位置。
2. 选择题答案必须使用 2B 铅笔（按填涂样例）正确填涂；非选择题答案必须使用 0.5 毫米黑色签字笔书写，绘图时，可用 2B 铅笔作答，字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。保持卡面清洁，不折叠、不破损。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知空间向量  $a = (-1, -2, 2)$ ,  $b = (3, 0, 3)$ , 则向量  $b$  在向量  $a$  上的投影为( )  
 A. 1                      B. 3                      C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       D.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
2. 已知倾斜角为  $\theta$  的直线  $l$  与直线  $x + \sqrt{3}y - 3 = 0$  的夹角为  $30^\circ$ , 则  $\theta$  的值为( )  
 A.  $30^\circ$  或  $150^\circ$                       B.  $120^\circ$  或  $0^\circ$                       C.  $90^\circ$  或  $30^\circ$                       D.  $60^\circ$  或  $180^\circ$
3. 已知点  $A(-3, 1)$ ,  $B(1, -3)$ , 则以线段  $AB$  为直径的圆的方程为( )  
 A.  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 8$                       B.  $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 8$   
 C.  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 32$                       D.  $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 32$
4. 已知直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  的所有棱长均为 1, 则直线  $AB_1$  与直线  $BC_1$  所成夹角的余弦值为( )  
 A.  $\frac{1}{8}$                       B.  $\frac{1}{6}$                       C.  $\frac{1}{4}$                       D.  $\frac{1}{2}$
5. 已知直线  $l$  与直线  $3x + 4y - 7 = 0$  的斜率相等, 且直线  $l$  与两坐标轴在第一象限内所围成三角形的面积为 24, 则直线  $l$  的方程为( )  
 A.  $3x + 4y + 12 = 0$                       B.  $3x + 4y + 24 = 0$                       C.  $3x + 4y - 12 = 0$                       D.  $3x + 4y - 24 = 0$
6. 过点  $P(0, -1)$  作直线  $l$ , 若直线  $l$  与连接  $A(-2, 1)$ ,  $B(2\sqrt{3}, 1)$  两点的线段总有公共点, 则直线  $l$  的倾斜角范围为( )  
 A.  $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}]$                       B.  $[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}]$                       C.  $[0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi)$                       D.  $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi)$
7. 正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 4,  $M, N, E, F$  分别为  $A_1D_1, A_1B_1, C_1D_1, B_1C_1$  的中点, 则平面  $AMN$  与平面  $EFD$  的距离为( )  
 A. 2                      B.  $\sqrt{3}$                       C.  $\frac{8}{3}$                       D. 1

8. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知圆的方程:  $x^2 + y^2 = 4$ , 点  $B, C$  是圆上关于  $y$  轴对称的两点, 点  $P$  是圆上任意一点, 直线  $PB$  与  $y$  轴交于点  $M$ , 直线  $PC$  与  $y$  轴交于点  $N$ , 则  $|\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{ON}|$  的值为( )

- A. 4                      B. 2                      C. 6                      D. 3

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知  $m, n$  是两条不同的直线,  $\alpha, \beta, \gamma$  是三个不同的平面, 下列说法中不正确的是( )

- A. 若  $\alpha \cap \beta = m, n \subset \alpha, n \perp m$ , 则  $n \perp \beta$       B. 若  $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \gamma = m, \beta \cap \gamma = n$ , 则  $n \perp m$   
 C. 若  $m \parallel n, \alpha \cap \gamma = m, \beta \cap \gamma = n$ , 则  $\alpha \parallel \beta$       D. 若  $m \parallel \alpha, m \subset \beta, \alpha \cap \beta = n$ , 则  $m \parallel n$

10. 下列命题正确的是( )

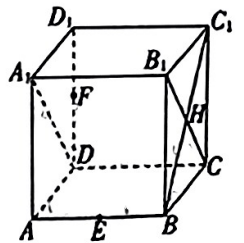
- A. 直线  $l$  的方向向量为  $a = (0, 2, 0)$ , 平面  $\alpha$  的法向量是  $n = (0, 3, 0)$ , 则  $l \perp \alpha$   
 B. 直线  $l$  的方向向量为  $a = (1, -3, 0)$ , 平面  $\alpha$  的法向量为  $n = (6, 2, 5)$ , 则  $l \parallel \alpha$   
 C. 平面  $\alpha$  经过三点  $A(-2, 0, -2), B(0, 2, 0), C(1, 3, 0)$ , 向量  $n = (1, u, t)$  是平面  $\alpha$  的法向量, 则  $-u + t = 1$   
 D. 平面  $\alpha$  的一个法向量为  $n = (-2, 3, 1)$ , 点  $A(1, 1, 2)$  在平面  $\alpha$  内, 则点  $B(2, 1, 4)$  也在平面  $\alpha$  内

11. 已知圆  $C: x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ , 下列说法正确的是( )

- A. 点  $(0, 0)$  在圆  $C$  内部  
 B. 圆  $C$  与圆  $x^2 + y^2 = 1$  相离  
 C. 过  $M(3, 4)$  的直线与圆  $C$  相交, 弦长为  $2\sqrt{3}$ , 则直线方程为  $x = 3$  或  $12x - 5y - 16 = 0$   
 D. 若  $m > 0, n > 0$ , 直线  $mx - ny - 1 = 0$  恒过圆  $C$  的圆心, 则  $\frac{1}{m} + \frac{2}{n} \geq 8$  恒成立

12. 如图, 已知在棱长为 2 的正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 点  $E, F, H$  分别是  $AB, DD_1, BC_1$  的中点, 点  $G$  是  $A_1D_1$  上的动点, 下列结论正确的是( )

- A.  $C_1D_1 \parallel$  平面  $ABH$   
 B.  $AC_1 \perp$  平面  $BDA_1$   
 C. 直线  $EF$  与  $BC_1$  所成的角为  $30^\circ$   
 D. 三棱锥  $G - DBC_1$  的体积最大值为  $\frac{8}{3}$



三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 过原点  $(0, 0)$  作直线  $l$ , 若点  $A(2, 3), B(4, -5)$  到直线  $l$  的距离相等, 则直线  $l$  的方程为\_\_\_\_\_。

14. 已知圆  $C$  的圆心位于第三象限且在直线  $y = 2x + 1$  上, 若圆  $C$  与两个坐标轴都相切, 则圆  $C$  的标准方程是\_\_\_\_\_。

15. 已知  $a = (-2, 1, 2), b = (3, 5, -1), c = (4, \lambda, 0)$ , 若  $a, b, c$  共面, 则  $\lambda =$ \_\_\_\_\_。

16. 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PA \perp$  面  $ABCD$ , 四边形  $ABCD$  为直角梯形,  $\angle ABC = \angle BAD = \frac{\pi}{2}$ ,  $PA = AD = 4, AB = BC = 2$ , 则平面  $PAB$  与平面  $PCD$  夹角的余弦值为 \_\_\_\_\_, 异面直线  $PB$  与  $CD$  的距离为 \_\_\_\_\_.

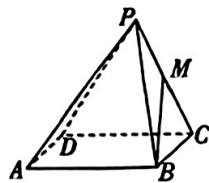
四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 已知  $\triangle ABC$  的顶点为  $A(2, 4), B(7, -1), C(-6, 1)$ .

- (1) 求过  $C$  且平行于直线  $AB$  的直线的方程;
- (2) 求边  $AB$  上的高  $CD$  所在直线的方程.

18. (12 分) 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  是矩形,  $AB$  长为 2,  $AD$  长为 1, 侧棱  $PA$  的长为  $\sqrt{2}$ , 且  $PA$  与  $AB, AD$  的夹角都等于  $45^\circ$ ,  $M$  是  $PC$  的中点. 设  $\vec{AB} = \mathbf{a}, \vec{AD} = \mathbf{b}, \vec{AP} = \mathbf{c}$ .

- (1) 试用  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  表示出向量  $\vec{BM}$ ;
- (2) 求  $BM$  的长.



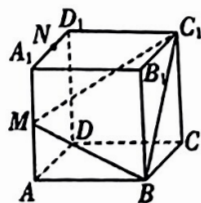
19. (12 分) 已知圆  $C$  经过点  $A(0, 4), B(3, 1)$ , 并且直线  $l: 3x - 2y = 0$  平分圆  $C$ .

(1) 求圆  $C$  的方程;

(2) 若直线  $m: y = kx + 2$  与圆  $C$  交于  $M, N$  两点, 是否存在直线  $m$ , 使得  $\vec{OM} \cdot \vec{ON} = 8$  ( $O$  为坐标原点), 若存在, 求出  $k$  的值; 若不存在, 请说明理由.

20. (12分) 如图, 正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $M$  为  $AA_1$  的中点.

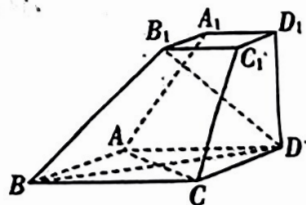
- (1) 若点  $N$  为  $A_1D_1$  的中点, 求证:  $M, B, C_1, N$  四点共面;
- (2) 求直线  $CD$  与平面  $MBC_1$  所成角的正弦值.



21. (12分) 如图, 在四棱台  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 底面  $ABCD$  是正方形,  $\angle B_1BD = \frac{\pi}{3}$ ,

$$\angle B_1BA = \angle B_1BC, AB = 2A_1B_1 = 2, BB_1 = 2\sqrt{2}.$$

- (1) 求证: 直线  $AC \perp$  平面  $BDB_1$ ;
- (2) 求二面角  $A_1 - BC - D$  的余弦值.



22. (12分) 在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AB = AD = 3, AA_1 = 2, M$  为棱  $BC$  的中点, 动点  $P$  在面  $DCC_1D_1$  上运动, 且满足  $\angle APD = \angle CPM$ .

- (1) 求点  $P$  的轨迹方程;
- (2) 求点  $P$  在长方形  $DCC_1D_1$  内的轨迹长度;
- (3) 求线段  $AP$  长度的最大值.