

2023 年湖北省荆荆宜仙高三下学期 2 月联考

高三数学参考答案

一、单选题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	B	C	A	C	D	C

二、多选题

题号	9	10	11	12
答案	BC	ABC	ACD	ABD

三、填空题:

13. -3 14. $\frac{1}{2}$ 15. $\frac{\sqrt{11}}{2}$ 16. $[1, +\infty)$

一、单选题

1. 【解析】集合 $M=R$ ，故 $M \cap N = \{-1, 0, 1\}$ ，答案选 D.

2. 【解析】复数 $z = \frac{2}{i+1} = 1-i$ ，故 $\bar{z} = 1+i$ ，答案选 B.

3. 【解析】若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线，则当 $\vec{b} = \vec{0}$ 时， λ 不唯一，故“ $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线”不是“存在唯一实数 λ 使得 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ ”的充分条件，当“存在唯一实数 λ 使得 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ ”时，“ $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线”成立，故“ $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线”是“存在唯一实数 λ 使得 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ ”的必要条件，答案选 B.

4. 【解析】由 $v = \frac{1}{2} \log_3 \frac{Q}{100}$ 得 $Q = 100 \times 3^{2v}$. 当 $v = 0$ 时， $Q_0 = 100$ ，当 $v = 1$ 时， $Q_1 = 900$ ，故 $\frac{Q_1}{Q_0} = 9$ ，答案选 C.

5. 【解析】 $(1 + \frac{1}{x})(1-2x)^5$ 展开式中的常数项 $T = 1 + \frac{1}{x} C_5^1 (-2x)^1 = -9$. 答案选 A.

6. 【解析】 $a = \cos 1 \in (\frac{1}{2}, 1)$ ，则 $p = \log_a \frac{1}{2} > 1$ ，结合函数图像 $r = (\frac{1}{2})^a < q = a^{\frac{1}{2}} < 1$. 答案选 C.

7. 【解析】六名同学排成一排照相，共有 $A_6^6 = 720$ 中不同的排列方法. 甲、乙、丙三人两两不相邻，且甲和丁相邻共有： $A_2^2 \times A_3^3 \times 3 \times 2 = 72$ 种不同的排法，故概率 $P = \frac{1}{10}$ ，答案选 D.

8. 【解析】法一： $\because k_{MN} < 0$ ，过 F 作渐近线的垂线，必于渐近线第一象限交于点 M ，与

第二象限交于点 N ，且 $|MF|=b$ ，作 $FG \perp l_2$ 于 G ，则 $Rt\triangle NMO \sim Rt\triangle NMF$ ，

$$\therefore \frac{NO}{NF} = \frac{MO}{GF}, \text{由 } \overline{NM} = \lambda \overline{MF} (\lambda \geq 2) \text{ 得 } |MN| = \lambda b, \therefore |NO| = \sqrt{a^2 + (\lambda b)^2}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{a^2 + (\lambda b)^2}}{(\lambda + 1)b} = \frac{a}{b}, \therefore \frac{b^2}{a^2} = \frac{\lambda + 2}{\lambda}, \therefore \text{离心率 } e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda}} (\lambda \geq 2),$$

$\therefore e \in (\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ ，故答案选 C.

法二： $\because k_{MN} < 0$ ，过 F 作渐近线的垂线，必于渐近线第一象限交于点 M ，与第二象限交

于点 N ，且 $|MF|=b$ ，设 $\angle MOF = \theta$ ，则 $\tan \theta = \frac{b}{a}$ ，

$$\tan \angle NOM = \tan(\pi - 2\theta) = -\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{\tan^2 \theta - 1} = \frac{2ab}{b^2 - a^2}, \text{由 } \overline{NM} = \lambda \overline{MF} (\lambda \geq 2) \text{ 得}$$

$$|MN| = \lambda b, \therefore \tan \angle NOM = \frac{\lambda b}{a}, \text{故 } \frac{2ab}{b^2 - a^2} = \frac{\lambda b}{a} (\lambda \geq 2), \therefore 1 < \left(\frac{b}{a}\right)^2 \leq 2, \therefore e \in (\sqrt{2}, \sqrt{3}].$$

故答案选 C.

二、多选题

9. 【解析】对 A， $\because c$ 不确定，故不正确；对 B， $\because a > 0, \therefore 0 < a < c, \therefore a < |c|$ ，故 B 正确；

对 C， $\because a > b > 0$ ，根据 $\frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ ，得 $a+b < \sqrt{2(a^2+b^2)}$ ，故 C 正确；对 D，

当 $c=0$ 时，不正确，故选 BC.

10. 【解析】中位数就是第 50 百分位数，选项 A 正确；

对选项 B， $X \sim B(n, \frac{1}{2})$ ，则 $D(2X+1) = 4D(X) = 4 \times n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = n = 5$ ，故 B 正确；

对选项 C， $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，函数 $f(x) = P(x < \xi < x+2)$ 为偶函数，则

$$f(-x) = P(-x < \xi < -x+2) = f(x) = P(x < \xi < x+2), \text{区间 } (-x, 2-x) \text{ 与 } (x, 2+x) \text{ 关于}$$

$$x = \mu \text{ 对称，故 } \mu = \frac{-x+x+2}{2} = \frac{x+2-x}{2} = 1, \text{选项 C 正确；}$$

$$\text{对选项 D，分层抽样的平均数 } \bar{x} = \frac{100}{100+100} \times 172 + \frac{100}{100+100} \times 165 = \frac{337}{2}, \text{按分成抽样样}$$

$$\text{本方差的计算公式 } S^2 = \frac{1}{2} \left\{ [120 + (172 - \frac{337}{2})^2] + [120 + (165 - \frac{337}{2})^2] \right\} = 132.25.$$

答案选：ABC

11. 【解析】对选项 A，在旋转过程中， $AC \perp$ 平面 BOP ， $BP \subset$ 平面 BOP ，故 $AC \perp BP$ ，

选项 A 正确；对选项 B，在旋转过程中，始终满足 $BP \perp DP$ ，故 $PD^2 + PB^2 = BD^2 = 8$ ，

$$\therefore PB + PD \leq \sqrt{2(PB^2 + PD^2)} = 4, \text{当且仅当 } PB = PD \text{ 时等号成立，故选项 B 错误；对选}$$

项 C, 在旋转过程中, 记 $\angle BOP = \theta (\theta \in (0, \pi))$, 以 $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OP}$ 为一组基底, 则

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OP} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC},$$

$$|\overrightarrow{EF}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OP} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\right)^2} = \sqrt{3 - \cos \theta}. \text{ 设旋转过程中, } EF \text{ 与平面 } BOP \text{ 所成角为 } \alpha,$$

$$\text{则 } \sin \alpha = |\cos \langle \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{OC} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{OC}|}{|\overrightarrow{EF}| |\overrightarrow{OC}|} = \frac{2}{\sqrt{3 - \cos \theta} \times \sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{3 - \cos \theta}} (\theta \in (0, \pi))$$

$\sin \alpha \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$, 故选项 C 正确; 对选项 D, ΔACD 旋转形成的几何体由两个半圆锥组成,

$$\text{其体积为 } V = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \pi \times (\sqrt{2})^2 \times \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi, \text{ 选项 D 正确, 答案选: ACD.}$$

12. 【解析】设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1^2 = 4y_1, x_2^2 = 4y_2$, 由 $x^2 = 4y$ 得 $y = \frac{x^2}{4}, y' = \frac{x}{2}$,

故在 A, B 处的切线方程分别为: $y - y_1 = \frac{x_1}{2}(x - x_1), y - y_2 = \frac{x_2}{2}(x - x_2)$, 即有:

$xx_1 = 2(y + y_1), xx_2 = 2(y + y_2)$ (*), 设 $P(x_0, y_0)$, 切线 PA, PB 均过点 P , 则切点弦 AB

所在直线方程为: $xx_0 = 2(y + y_0)$, 又 AB 过点 $(0, 1)$, 则 $y_0 = -1$ 恒成立, 即 P 在直线

$$y = -1 \text{ 上, 由 (*) 可得 } x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = x_Q, \text{ 故 } PQ \perp x \text{ 轴, 选项 A 正确, } k_{DE} = \frac{\frac{x_1 + x_2}{2}}{\frac{x_0}{2}} = \frac{x_0}{2},$$

故 $k_{DE} = k_{AB}$, 故 $DE \parallel AB$, 选项 B 正确; 根据题意, 直线 AB 的斜率显然存在设为 k ,

则 $AB: y = kx + 1, \therefore k_{DE} = k = \frac{x_0}{2}, \therefore x_0 = 2k$. 故 $M(2k, k^2), DE: y = kx - k^2, P(2k, -1)$,

$$P \text{ 到直线 } AB, DE \text{ 的距离分别为 } d_1 = \frac{|2k^2 + 2|}{\sqrt{1 + k^2}} = 2\sqrt{1 + k^2}, d_2 = \frac{|k^2 + 1|}{\sqrt{1 + k^2}} = \sqrt{1 + k^2},$$

$\therefore d_1 = 2d_2$, 故 DE 是 ΔPAB 的中位线, $\therefore S_{\Delta MAB} = 2S_{\Delta PDE}$, 且

$S_{\Delta ADM} = S_{\Delta PDM}, S_{\Delta PDE} = S_{\Delta MBE}$, 根据题意可得 M 是 DE 中点, $\therefore S_{\Delta PDM} = S_{\Delta PDE}$, 故

$S_{\Delta ADM} = S_{\Delta PDM} = S_{\Delta PDE} = S_{\Delta MBE} \neq 0$ 选项 C 错误, D 正确; 答案选 ABD.

三、填空题

13. 【解析】 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$, 则 P 为 AB 靠近 B 的三等分点, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = 2 \times 3 \times \cos 120^\circ = -3$.

14. 【解析】根据题意 $\omega \times \frac{\pi}{2} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k_1\pi, k_1 \in \mathbb{Z}, \omega \times (-\frac{\pi}{2}) + \varphi = k_2\pi, k_2 \in \mathbb{Z}.$

$\therefore \omega\pi = \frac{\pi}{2} + (k_1 - k_2)\pi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$ 又 $\omega > 0$, 故 $\omega_{\min} = \frac{1}{2}.$

15. 【解析】设 $P(x_0, y_0)$ 满足 $x_0 + 2y_0 - 4 = 0$, 则切点弦 AB 的方程为 $x_0x + y_0y - 1 = 0$,

则 $(y - 2x)y_0 + 4x - 1 = 0$, 直线过定点 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, 故 $|AB|_{\min} = 2\sqrt{1 - ((\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{2})^2)} = \frac{\sqrt{11}}{2}.$

16. 【解析】关于 x 的不等式 $2\ln x - x^2e^x + ax + 1 \geq 0$ 有解, 则 $2\ln x + ax + 1 \geq x^2e^x = e^{2\ln x + x}$

有解, 又 $e^{2\ln x + x} \geq 2\ln x + x + 1 \therefore (a-1)x \geq 0, a \geq 1$, 即 $a \in [1, +\infty).$

四、解答题

17. (1) $a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + b_n$

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - b_n)$$

又 $a_1 = 2, b_1 = 1$

$$\therefore a_n + b_n = 3 \text{ ①}$$

$\{a_n - b_n\}$ 是以 1 为首项, $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列

$$\therefore a_n - b_n = (\frac{1}{2})^{n-1} \text{ ②}$$

$\therefore$ 联立①②解得

$$a_n = \frac{1}{2^n} + \frac{3}{2}$$

$$b_n = \frac{1}{2^n} + \frac{3}{2}$$

.....5 分

$$(2) c_n = 3a_n + b_n = \frac{3}{2^n} + \frac{9}{2} - \frac{1}{2^n} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2^{n-1}} + 6$$

$$\therefore nc_n = \frac{n}{2^{n-1}} + 6n, \text{ 令 } d_n = \frac{n}{2^{n-1}}$$

$$\therefore T_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_{n-1} + d_n$$

$$= \frac{1}{2^0} + \frac{2}{2^1} + \cdots + \frac{n-1}{2^{n-2}} + \frac{n}{2^{n-1}} \text{ ③}$$

$$\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n} \text{ ④}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{由③-④得: } \frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} \\
 & = \frac{1 \cdot [1 - (\frac{1}{2})^n]}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^n} \\
 & = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{2+n}{2^n} \\
 & \therefore T_n = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}} \\
 & \therefore S_n = T_n + \frac{n(6+6n)}{2} = 3n^2 + 3n + 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}
 \end{aligned}$$

18.解: (1) 根据题意, 设 C 到平面 SBD 的距离为 h

$$\text{由 } V_{S-BCD} = V_{C-SBD} \text{ 得 } \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle BCD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle SBD} \cdot h$$

$$\text{代入数据 } \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times h, \text{ 得 } h = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{而 } C \text{ 到平面 } SBD \text{ 的距离为 } \frac{2\sqrt{6}}{3}. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 由 $SA \perp$ 平面 $ABCD$

$\therefore SA, AB, AD$ 两两垂直

以 A 为坐标原点, 分别以 AD, AB, AS 为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系 $A-xyz$,

$$\text{则 } S(0,0,2), D(1,0,0), C(2,2,0), \text{ 则 } \overrightarrow{SD} = (1,0,-2), \overrightarrow{DC} = (1,2,0)$$

设平面 SCD 的一个法向量为 $\vec{n}_1 = (x_0, y_0, z_0)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{SD} \perp \vec{n}_1 \\ \overrightarrow{DC} \perp \vec{n}_1 \end{cases} \therefore \begin{cases} \overrightarrow{SD} \cdot \vec{n}_1 = (1,0,-2) \cdot (x_0, y_0, z_0) = x_0 - 2z_0 = 0 \\ \overrightarrow{DC} \cdot \vec{n}_1 = (1,2,0) \cdot (x_0, y_0, z_0) = x_0 + 2y_0 = 0 \end{cases}$$

$$\text{令 } z_0 = 1, \text{ 则 } x_0 = 2, y_0 = -1, \therefore \vec{n}_1 = (2, -1, 1)$$

$$\text{平面 } SAB \text{ 的一个法向量 } \vec{n}_2 = (1, 0, 0)$$

设平面 SAB 与平面 SCD 的夹角为 θ , 则

$$|\cos \theta| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{2}{1 \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore \text{平面 } SAB \text{ 与平面 } SCD \text{ 的夹角的正弦值为 } \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19.解 (1) 由 $c^2 = b^2 + ab$

由余弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos c$ 得

$$a = b(2 \cos c + 1)$$

由正弦定理得: $\sin A = \sin B(2 \cos c + 1)$

又 $A + B + C = \pi$

$$\therefore \sin A = \sin(B + C) = \sin B \cos C + \cos B \cdot \sin C = 2 \sin B \cos C + \sin B$$

$$\therefore \cos B \sin C - \sin B \cos C = \sin B$$

$$\therefore \sin(C - B) = \sin B$$

$\because A, B, C$ 都是锐角

$$\therefore C - B = B \quad \therefore C = 2B \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 令 } y &= \frac{1}{\tan B} - \frac{1}{\tan C} + 3 \sin C \\ &= \frac{\cos B}{\sin B} - \frac{\cos C}{\sin C} + 3 \sin C \\ &= \frac{\sin C \cos B - \cos C \cdot \sin B}{\sin B \cdot \sin C} + 3 \sin C \\ &= \frac{\sin(C - B)}{\sin B \cdot \sin C} + 3 \sin C \end{aligned}$$

由 (1) $C = 2B$ 得 $y = \frac{1}{\sin C} + 3 \sin C \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

在锐角三角形 ABC 中

$$\begin{cases} 0 < A < \frac{\pi}{2} \\ 0 < B < \frac{\pi}{2} \\ 0 < C < \frac{\pi}{2} \end{cases} \therefore \begin{cases} 0 < \pi - (B+C) < \frac{\pi}{2} \\ 0 < B < \frac{\pi}{2} \\ 0 < C < \frac{\pi}{2} \end{cases} \therefore \frac{\pi}{3} < C < \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \sin C \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) \quad \therefore y \text{ 令 } t = \sin C \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$$

$$\therefore y = f(t) = \frac{1}{t} + 3t, \quad t \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) \text{ 上单调递增}$$

$$\therefore y = f(t) \in \left(\frac{13\sqrt{3}}{6}, 4\right), \quad \text{而 } \frac{1}{\tan B} - \frac{1}{\tan C} + 3\sin C \text{ 的取值范围是 } \left(\frac{13\sqrt{3}}{6}, 4\right) \dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. (1) 假设 H_0 : 数学成绩与语文成绩无关1 分

据表中数据计算得

$$\chi^2 = \frac{200(50 \times 80 - 30 \times 40)^2}{90 \times 110 \times 120 \times 80} \approx 16.498 > 6.635 \dots\dots 3 \text{ 分}$$

根据小概率值 $\alpha = 0.010$ 的 χ^2 的独立性检验,

我们推断 H_0 不成立, 而认为数学成绩与语文成绩有关.4 分

$$(2) L(B|A) = \frac{P(B|A)}{P(\overline{B}|A)} = \frac{\frac{P(AB)}{P(A)}}{\frac{P(\overline{AB})}{P(A)}} = \frac{P(AB)}{P(\overline{AB})} = \frac{80}{30} = \frac{8}{3}$$

$$\therefore \text{估计 } L(B|A) \text{ 的值为 } \frac{8}{3}. \dots\dots 7 \text{ 分}$$

(3) 按分层抽样, 语文成绩优秀的 5 人, 语文成绩不优秀的 3 人, 随机变量 X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3.

$$P(X=0) = \frac{C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56}, \quad P(X=1) = \frac{C_5^1 C_3^2}{C_8^3} = \frac{15}{56},$$

$$P(X=2) = \frac{C_5^2 C_3^1}{C_8^3} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}, \quad P(X=3) = \frac{C_5^3}{C_8^3} = \frac{10}{56} = \frac{5}{28} \dots\dots 9 \text{ 分}$$

$\therefore X$ 的概率分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{28}$

$\therefore$ 数学期望 $E(X) = 0 \times \frac{1}{56} + 1 \times \frac{15}{56} + 2 \times \frac{15}{28} + 3 \times \frac{5}{28} = \frac{105}{56} = \frac{15}{8}$ 12 分

21. 解 (1) 由题意: $\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \\ 2a + 2c = 6 \end{cases}$ 解得 $a = 2, c = 1$, 又 $a^2 = b^2 + c^2$, 得 $b^2 = 3$

$\therefore$ 椭圆 c 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 4 分

(2) 显然 AB 的斜率存在, 设 $AB: y = kx + 1, (k \neq 0)$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

联立 $\begin{cases} y = kx + 1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ 消去 y 得 $(3 + 4k^2)x^2 + 8kx - 8 = 0, \Delta > 0$.

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{8k}{3 + 4k^2}, x_1 x_2 = \frac{-8}{3 + 4k^2}$$

$$\text{设 } P(m, 3), \text{ 则 } \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_3} = \frac{m - x_1}{3 - y_1} + \frac{m - x_2}{3 - y_2} = \frac{(m - x_1)(3 - y_2) + (m - x_2)(3 - y_1)}{(3 - y_1)(3 - y_2)}$$

$$= \frac{4m - (mk + 2)(x_1 + x_2) + 2kx_1 x_2}{4 - 2k(x_1 + x_2) + k^2 x_1 x_2}$$

$$= \frac{4m - (mk + 2) \cdot \frac{-8k}{3 + 4k^2} + 2k \cdot \frac{-8}{3 + 4k^2}}{4 + 2k \cdot \frac{8k}{3 + 4k^2} + k^2 \cdot \frac{-8}{3 + 4k^2}} = \frac{12m + 24mk^2}{12 + 24k^2} = m$$

$$\text{又 } \frac{1}{k_2} = \frac{m}{2} \therefore \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_3} = \frac{2}{k_2}$$

故 $\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, \frac{1}{k_3}$ 成等差数列.12 分

22. 解 (1) $f(x) = x - a \ln x, x > 0$

$$f'(x) = 1 - \frac{a}{x} = \frac{x - a}{x}$$

1° $a \leq 0$ 时 $f'(x) = 0$ 无解

$$f'(x) > 0$$

$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

$$2^\circ a < 0 \text{ 时 } f'(x) = 0 \Rightarrow x = a$$

$x \in (0, a)$ 时 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减

$x \in [0, +\infty)$ 时 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增

综上: $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 递增;

$a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递减, 在 $[a, +\infty)$ 上单调递增;5 分

$$(2) f(x) = g(x) \text{ 即 } x - 2\ln x = kx^2 + m$$

$$\text{即 } x - 2\ln x - kx^2 = m$$

$$\text{令 } H(x) = x - 2\ln x - kx^2$$

$$H'(x) = 1 - \frac{2}{x} - 2kx = -\frac{2kx^2 - x + 2}{x}$$

$$\text{令 } H'(x) = 0, \text{ 即 } 2kx^2 - x + 2 = 0$$

$1^\circ \Delta = 1 - 16k \leq 0$ 即 $k \geq \frac{1}{16}$ 时, $H'(x) = 0$ 无解或有两等根,

$$H'(x) = -\frac{2kx^2 - x + 2}{x} \leq 0, \quad H(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递减}$$

$x \rightarrow 0^+$ 时, $H(x) \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow +\infty$ 时, $H(x) \rightarrow -\infty$,

故此时 $m \in R$ 7 分

$2^\circ \Delta = 1 - 16k > 0$ 即 $0 < k < \frac{1}{16}$ 时, $H'(x) = 0$ 有两个不等实数根,

$$\text{易知 } x_1 + x_2 = \frac{1}{2k}, \quad x_1 x_2 = \frac{1}{k}, \quad x_1 > 0, \quad x_2 > 0,$$

不妨取 $x_1 < x_2$,

$H(x)$ 在 $(0, x_1)$ 和 $(x_2, +\infty)$ 上单调递减

在 $[x_1, x_2]$ 单调递增,

$$\text{又 } x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 16k}}{4k} \in (2, 4), \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 16k}}{4k} \in (4, +\infty)$$

$$\therefore H(x_1) = \frac{1}{2}x_1 - 2\ln x_1 + 1 (x_1 \in (2, 4)), \quad H'(x_1) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x_1} < 0, \quad \text{故 } H(x_1) \text{ 在 } (2, 4) \text{ 上单调递}$$

$$\text{减, } \therefore H(x_1) \in (3 - 4\ln 2, 2 - 2\ln 2)$$

$$H(x_2) = \frac{1}{2}x_2 - 2\ln x_2 + 1 (x_2 \in (4, +\infty)), \quad H'(x_2) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x_2} > 0, \quad \text{故 } H(x_2) \text{ 在 } (4, +\infty) \text{ 上单调}$$

递增

$$\therefore H(x_2) \in (3 - 4\ln 2, +\infty)$$

综上: 要对 $\forall k > 0$, 方程 $f(x) = g(x)$ 只有一个实数根, 则

$$m \in (-\infty, 3 - 4\ln 2] \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线