

2022 年中国数学奥林匹克希望联盟夏令营试题（一）

考试时间：2022 年 7 月 26 日上午 8:00 — 9:20

一、填空题（本大题共 8 道小题，每小题 8 分，共 64 分）

1. 设集合 $\left\{\frac{2}{a}+b \mid 1 \leq a \leq b \leq 3\right\}$ 中的最大元素与最小元素分别为 M, m ，则 $M-m$ 的值为_____.
2. m 为给定的正整数，则使得 m^2+n 整除 n^2+m 的最大正整数 n 是_____.
3. 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则函数 $f(x)=\frac{x+1}{[x]+1}$ 的值域是_____.
4. 在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 和抛物线 $C_2: y^2=\frac{1}{2}ax$ 交于 A, B 两点， P 为 C_1 椭圆的右顶点，若 O, A, P, B 四点共圆，则 C_1 的离心率为_____.
5. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AB=BC=CA=AA_1=2$ ，点 D 为棱 A_1C_1 上的点，且 $BC_1 \parallel$ 平面 AB_1D ．以 D 为球心、 $\frac{\sqrt{7}}{2}$ 为半径的球面与侧面 AA_1B_1B 的交线长为_____.
6. 已知复数 z, w 满足 $\begin{cases} z+\frac{20i}{w}=5+i \\ w+\frac{12i}{z}=-4+10i \end{cases}$ ，则 $|zw|$ 可取得的最小值为_____.
7. 已知 $\triangle ABC$ 为锐角三角形， A, B, C 为其三个内角，则 $2 \cot A+3 \cot B+4 \cot C$ 的最小值为_____.
8. 已知多项式 $f(z)=z^3+az^2+bz+c(a, b, c \in \mathbf{Z})$ 的所有根的模均为 20 或 15，则这样的多项式的个数为_____.

二、解答题（本大题共 3 道小题，第 9 题 16 分，第 10 题 20 分，第 11 题 20 分，共 56 分）

9. 已知点 $M(2,2)$ 在抛物线 $C: x^2=2py(p>0)$ 上，过点 $(1,0)$ 作直线 l_1 交抛物线 C 于不同的两点 P, Q ，交 y 轴于点 N ．过点 N 作平行于 OQ 的直线 l_2 交直线 OP 于点 S ，交直线 OM 于点 T ，交 x 轴于点 R ．求 $\frac{|SR|}{|ST|}$ 的值.
10. a_0 为任意给定的正整数，如下定义整数序列 $\{a_n\}$ ： $a_n \equiv -S_{n-1} \pmod{n}$ ， $n=1, 2, \dots$ ，且 $1 \leq a_n \leq n$ ，其中 $S_n=a_0+a_1+\dots+a_n, n=0, 1, 2, \dots$ ．证明：存在无穷多个正整数 m ，使得 S_m 是完全平方数.
11. 已知正实数 $a_1, a_2, \dots, a_{2022}, b_1, b_2, \dots, b_{2022}$ 满足 $a_1+a_2+\dots+a_{2022}=b_1+b_2+\dots+b_{2022}=1$ ，求

$$S=\min_{1 \leq i \leq 2022} \frac{a_i}{b_i}+\min_{1 \leq i \leq 2022} \frac{b_i}{a_i}+\sum_{i=1}^{2022} |a_i-b_i|$$

的最大值.

2022 年中国数学奥林匹克希望联盟夏令营试题 (一)

考试时间: 2022 年 7 月 26 日上午 8:00 — 9:20

一、填空题 (本大题共 8 道小题, 每小题 8 分, 共 64 分)

1. 设集合 $\left\{\frac{2}{a}+b \mid 1 \leq a \leq b \leq 3\right\}$ 中的最大元素与最小元素分别为 M, m , 则 $M-m$ 的值为_____

【答案】 $5-2\sqrt{2}$

【解析】 $\frac{2}{a}+b \leq \frac{2}{1}+3=5$ 即 $M=5$, $\frac{2}{a}+b \geq \frac{2}{a}+a \geq 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $a=b=\sqrt{2}$ 时取等号, 即 $m=2\sqrt{2}$, 所以

$$M-m=5-2\sqrt{2}.$$

2. m 为给定的正整数, 则使得 m^2+n 整除 n^2+m 的最大正整数 n 是_____.

【答案】 m^4-m^2+m .

【解析】 由题意知 $\frac{n^2+m}{m^2+n} \in \mathbf{Z}$. 因为

$$\frac{n^2+m}{m^2+n} = \frac{(n+m)^2 - 2m^2(n+m^2) + m^4 + m}{m^2+n} = n+m^2 - 2m^2 + \frac{m^4+m}{n+m^2},$$

所以 $\frac{m^4+m}{n+m^2}$ 是正整数. 从而,

$$n+m^2 \leq m^4+m \Rightarrow n \leq m^4-m^2+m.$$

经检验知, $n=m^4-m^2+m$ 符合条件. 因此, n 的最大值是 m^4-m^2+m .

3. 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则函数 $f(x) = \frac{x+1}{[x]+1}$ 的值域是_____.

【答案】 $(0, 2)$

【解析】 设 $\{x\} = x - [x] \in [0, 1)$, 则 $f(x) = \frac{x+1}{[x]+1} = 1 + \frac{\{x\}}{[x]+1}$,

$f(x) = \frac{x+1}{[x]+1}$ 的定义域是 $(-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$,

当 $x \geq 0$ 时, $[x]+1 = 1, 2, 3, \dots$, $f(x) = 1 + \frac{\{x\}}{[x]+1}$ 的值域是 $[1, 2)$,

当 $x < -1$ 时, $[x]+1 = -1, -2, -3, \dots$, $f(x) = 1 + \frac{\{x\}}{[x]+1}$ 的值域是 $(0, 1]$,

则函数 $f(x) = \frac{x+1}{[x]+1}$ 的值域是 $(0, 2)$.

4. 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 和抛物线 $C_2: y^2 = \frac{1}{2}ax$ 交于 A, B 两点, P 为 C_1 椭圆的右顶点, 若 O, A, P, B 四点共圆, 则 C_1 的离心率为_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

【解析】 由对称性, $\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$, 故 A, B 在以 OP 为直径的圆上.

由

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x^2 - ax + y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{c^2}{a^2}x^2 - ax + b^2 = 0$$

故 $x_A \cdot x_P = \frac{a^2b^2}{c^2} \Rightarrow x_A = \frac{ab^2}{c^2}$, 故 $y_A^2 = -x_A^2 + ax_A = -\frac{a^2b^4}{c^4} + \frac{a^2b^2}{c^2}$.

由 $y_A^2 = \frac{1}{2}ax_A$, 故 $-\frac{a^2b^4}{c^4} + \frac{a^2b^2}{c^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2b^2}{c^2} \Rightarrow c^2 = 2b^2 \Rightarrow 3c^2 = 2a^2$

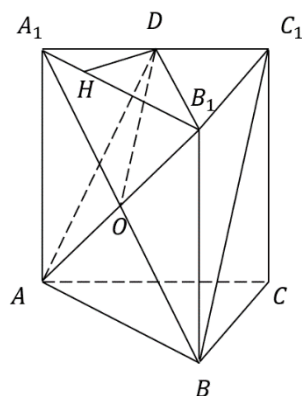
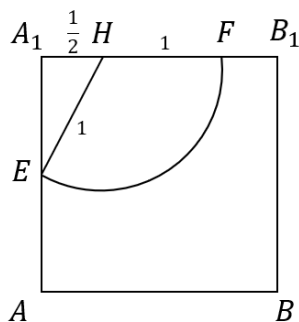
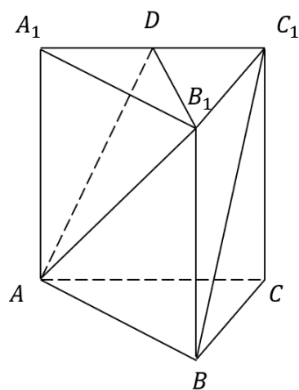
因此椭圆的离心率为 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

5. 在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = BC = CA = AA_1 = 2$, 棱 A_1C_1 上的点 D 满足 $BC_1 \parallel$ 平面 AB_1D . 以 D 为球心、 $\frac{\sqrt{7}}{2}$ 为半径的球面与侧面 AA_1B_1B 的交线长为_____.

【答案】 $\frac{2\pi}{3}$

【解析】 如图, 连接 A_1B 交 AB_1 于点 O , 连接 DO , 易知点 D 为 A_1C_1 中点, 过点 D 作 A_1B_1 垂线垂足为 H . 又由

$\triangle A_1B_1C_1$ 为正三角形, 则 $DH = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故 $EH = \sqrt{R^2 - DH^2} = 1$, $\angle A_1HE = 60^\circ$, 交线为弧 EF 长为 $\frac{1}{3} \times 2 \times \pi = \frac{2\pi}{3}$



6. 已知复数 z, w 满足 $\begin{cases} z + \frac{20i}{w} = 5 + i \\ w + \frac{12i}{z} = -4 + 10i \end{cases}$, 则 $|zw|$ 的最小值为_____.

【答案】 $2\sqrt{10}$

【解析】 将两式相乘得 $(zw)^2 - (-30 + 14i)(zw) - 240 = 0$,

由求根公式知, $zw = 6 + 2i$ 或 $-36 + 12i$,

故 $|zw|$ 可取得的最小值为 $2\sqrt{10}$.

7. 已知 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, A, B, C 为其三个内角, 则 $2\cot A + 3\cot B + 4\cot C$ 的最小值为_____.

【答案】 $\sqrt{23}$

【解析】 由不等式 $(2x - 3y \cos \gamma - 4z \cos \beta)^2 + (3y \sin \gamma - 4z \sin \beta)^2 \geq 0$, 整理可得

$$(2x + 3y + 4z)^2 \geq 12(\cos \gamma + 1)xy + 24(1 - \cos(\beta + \gamma))yz + 16(\cos \beta + 1)zx$$

待定系数, 记 $12(\cos \gamma + 1) = 24(1 - \cos(\beta + \gamma)) = 16(\cos \beta + 1) = k$.

得到方程 $\left(\frac{k}{12} - 1\right)\left(\frac{k}{16} - 1\right) - \sqrt{1 - \left(\frac{k}{12} - 1\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{k}{16} - 1\right)^2} = 1 - \frac{k}{24}$, 解得 $k = 23$.

因此, 有 $(2x + 3y + 4z)^2 \geq 23(xy + yz + zx)$,

又因为 $\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$,

所以, $(2\cot A + 3\cot B + 4\cot C)^2 \geq 23$,

所以, 所求最小值为 $\sqrt{23}$.

8. 已知多项式 $f(z) = z^3 + az^2 + bz + c (a, b, c \in \mathbf{Z})$ 的所有根的模均为 20 或 15, 则这样的多项式的个数为_____.

【答案】 572

【解析】 根据多项式零点的规律, 知 $P(z)$ 的零点中实数的个数为 1 或 3.

(1) $P(z)$ 的三个零点均为实数. 它们取值 $\pm 15, \pm 20$, 设零点中取每个值的个数分别为 x_1, x_2, x_3, x_4 , 这种情形中可能的多项式个数即为不定方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$ 的非负整数解的组数, 利用插板法, 即 $C_6^3 = 20$ 个.

(2) $P(z)$ 的三个零点中有一个实数, 一对共轭复数. 记实根为 c , 共轭复根为 $\alpha \pm \beta i$, 那么 $P(z) = (x - c)(x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + \beta^2))$. 注意到 $a, b, c \in \mathbf{Z}$, 其中 $\alpha^2 + \beta^2$ 取 225 或 400 为整数, 故只需要 $2\alpha \in \mathbf{Z}$.

① $|\alpha \pm \beta i| = 15$, 此时 $\alpha = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{2}{2}, \dots, \pm \frac{29}{2}$, 它们与 c 唯一确定 $P(z)$, c 有 4 种取值, 共有 $59 \times 4 = 236$ 个.

② $|\alpha \pm \beta i| = 20$ ，此时 $\alpha = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{2}{2}, \dots, \pm \frac{39}{2}$ ，它们与 c 唯一确定 $P(z)$ ， c 有 4 种取值，共有 $79 \times 4 = 316$ 个。

综上所述，满足要求的 $P(z)$ 共有 $20 + 236 + 316 = 572$ 个。

二、解答题（本大题共 3 道小题，第 9 题 16 分，第 10 题 20 分，第 11 题 20 分，共 56 分）

9. 已知点 $M(2, 2)$ 在抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 上，过点 $(1, 0)$ 作直线 l_1 交抛物线 C 于不同的两点 P, Q ，交 y 轴于点 N 。过点 N 作平行于 OQ 的直线 l_2 交直线 OP 于点 S ，交直线 OM 于点 T ，交 x 轴于点 R 。求 $\frac{|SR|}{|ST|}$ 的值。

【解析】

由题意易得抛物线 C 的方程为 $x^2 = 2y$ ，设 $P\left(x_1, \frac{x_1^2}{2}\right), Q\left(x_2, \frac{x_2^2}{2}\right)$ 。

因为直线 PQ 过点 $(1, 0)$ ，故 $k_{PQ} = \frac{\frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{2}}{x_1 - x_2} = \frac{x_2^2 - 0}{x_2 - 1}$ ，化简可得： $x_1 = \frac{x_2}{x_2 - 1}$ ①

所以直线 PQ 的方程为 $y = \frac{x_1 + x_2}{2}(x - 1)$ ，

令 $x = 0$ ，可得 N 点纵坐标为 $y_N = -\frac{x_1 + x_2}{2}$ ，即 N 点坐标为 $\left(0, -\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ 。4 分

又因为直线 $l_2 // OQ$ ，所以 $k_{l_2} = k_{OQ} = \frac{x_2}{2}$ ，

所以直线 l_2 的方程为： $y = \frac{x_2}{2}x - \frac{x_1 + x_2}{2}$ 。

联立直线 l_2 与直线 OM 的方程： $\begin{cases} y = \frac{x_2}{2}x - \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y = x \end{cases}$ ，消去 x ，可得 T 点纵坐标：

$y_T = \frac{x_1 + x_2}{x_2 - 2}$ ，结合①式，化简可得： $y_T = \frac{x_2^2}{(x_2 - 1)(x_2 - 2)}$ 。8 分

联立直线联立直线 l_2 与直线 OP 的方程： $\begin{cases} y = \frac{x_2}{2}x - \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \frac{x_1}{2}x \end{cases}$ ，消去 x ，可得 S 点纵坐标：

$y_S = \frac{(x_1 + x_2)x_1}{2(x_2 - x_1)}$ ，结合①式，化简可得： $y_S = \frac{x_2^2}{2(x_2 - 1)(x_2 - 2)}$ 。12 分

所以 $y_T = 2y_S$ ，故 $\frac{|SR|}{|ST|} = \frac{|y_S|}{|y_T - y_S|} = 1$ 。16 分

10. a_0 为任意给定的正整数, 如下定义整数序列 $\{a_n\}$: $a_n \equiv -S_{n-1} \pmod{n}$, $n=1, 2, \dots$, 且 $1 \leq a_n \leq n$, 其中

$S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n, n=0, 1, 2, \dots$. 证明: 存在无穷多个正整数 m , 使得 S_m 是完全平方数.

【解析 1】 设 $k_n = \frac{S_n}{n}$,

先证明正整数数列 $\{k_n\}$ 是单调不增的.

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n = k_n n = k_n (n+1) - k_n$$

$$\text{故 } a_{n+1} \equiv k_n \pmod{n},$$

.....5 分

$$\text{故有 } a_{n+1} \leq k_n$$

$$\text{因此 } k_{n+1} - k_n = \frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = \frac{na_{n+1} - S_n}{n(n+1)} = \frac{n(a_n - k_n)}{n(n+1)} = \frac{a_n - k_n}{n+1} \leq 0$$

故正整数数列 $\{k_n\}$ 是单调不增的.

因此存在正整数 N , 使得 $n \geq N$ 时, 有 $k_n = c$, c 为某确定正整数.

.....15 分

即 $n \geq N$ 时, $S_n = cn$, 故取 $m = ck^2$, 且 $m \geq N$, 即有 $S_m = c^2 k^2$, 这样的 m 显然有无穷多个.

.....20 分

【解析 2】 $S_n \leq a_0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + a_0$

$$\text{故存在 } t, S_t < t^2$$

.....5 分

$$\text{设 } S_t = t(t-k), k \text{ 为正整数}$$

$$\text{则由于 } S_t = (t+1)(t-k) - t + k,$$

$$\text{故 } a_{t+1} \equiv t-k \pmod{t+1}$$

$$\text{又 } 1 \leq t-k \leq t+1$$

$$\text{故 } a_{t+1} = t-k$$

$$\text{故 } S_{t+1} = (t+1)(t-k)$$

.....15 分

依次类推, 可知 $a_n = t-k$, $n \geq t+1$, 且 $S_n = n(t-k)$, 故当 $m = l^2(t-k)$, 且 $m \geq t+1$ 时, S_m 均为完全平方数.

.....20 分

11. 已知正实数 $a_1, a_2, \dots, a_{2022}, b_1, b_2, \dots, b_{2022}$ 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_{2022} = b_1 + b_2 + \dots + b_{2022} = 1$, 求

$$S = \min_{1 \leq i \leq 2022} \frac{a_i}{b_i} + \min_{1 \leq i \leq 2022} \frac{b_i}{a_i} + \sum_{i=1}^{2022} |a_i - b_i|$$

的最大值.

【解析】 S 的最大可能值为 2, 当 $a_i = b_i = \frac{1}{2022}$, $i = 1, 2, \dots, 2022$ 时取得.

.....5 分

下证明: $S \leq 2$.

$$\text{设 } a = \min_{1 \leq i \leq 2022} \frac{a_i}{b_i}, \quad b = \min_{1 \leq i \leq 2022} \frac{b_i}{a_i}, \quad A_1 = \sum_{a_i \geq b_i} a_i, \quad A_2 = \sum_{a_i < b_i} a_i, \quad B_1 = \sum_{b_i > a_i} b_i, \quad B_2 = \sum_{b_i \leq a_i} b_i,$$

$$\text{则 } S = a + b + A_1 - B_2 + B_1 - A_2$$

$$\text{显然有 } A_1 + A_2 = 1, B_1 + B_2 = 1, \text{ 即 } S = a + b + 2 - 2(A_2 + B_2)$$

$$\text{故只需证明: } 2(A_2 + B_2) \geq a + b.$$

$$\text{由我们的假设可知 } A_2 \geq aB_1, \quad B_2 \geq bA_1,$$

$$\text{结合 } A_1 + A_2 = 1, B_1 + B_2 = 1$$

$$\text{则有 } \begin{cases} B_2 + bA_2 \geq b & \textcircled{1} \\ A_2 + aB_2 \geq a & \textcircled{2} \end{cases}$$

.....10 分

$$\textcircled{1} \times (1-a) + \textcircled{2} \times (1-b) \text{ 可知}$$

$$A_2 + B_2 \geq \frac{a+b-2ab}{1-ab}$$

.....15 分

$$\text{即只需证明 } \frac{a+b-2ab}{1-ab} \geq \frac{a+b}{2}$$

$$\text{整理可知只需证明 } a+b+ab(a+b) \geq 4ab$$

$$\text{即 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + a + b \geq 4,$$

这显然成立, 故我们证明了 $S \leq 2$.

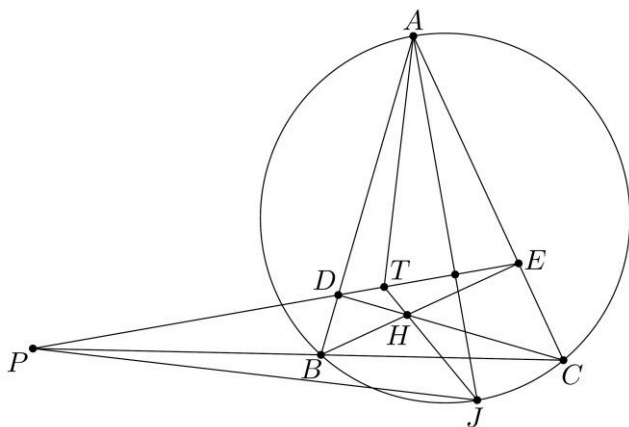
.....20 分

2022 年中国数学奥林匹克希望联盟夏令营试题（一）加试

考试时间：2022 年 7 月 26 日上午 9:40 — 12:30

一、（本题满分 40 分）

如图，锐角 $\triangle ABC$ 的垂心为 H ， CD 、 BE 分别为 AB 、 AC 边上的高，延长 ED 、 CB 交于 P ， AJ 为 $\triangle ABC$ 外接圆的直径，延长 JH 交 DE 于 T ，连结 JP 。证明： $AT \perp JP$ 。（答题时请将图画在答卷纸上）



二、（本题满分 40 分）

给定正整数 n ，非负实数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 4$ ，记

$$S = a_1 + a_1 a_2 + \dots + a_1 a_2 \cdots a_n,$$

求 S 的最大值。

三、（本题满分 50 分）

求所有的正整数 n ，存在一种方案将集合 $\{1, 2, \dots, 2n\}$ 划分为 n 个元素个数为 2 且

两两不交的集合 $A_1, A_2, \dots, A_n$ ，使得不存在 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 同时满足

$$(1) \ x_i \in A_i (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2) \ 2n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

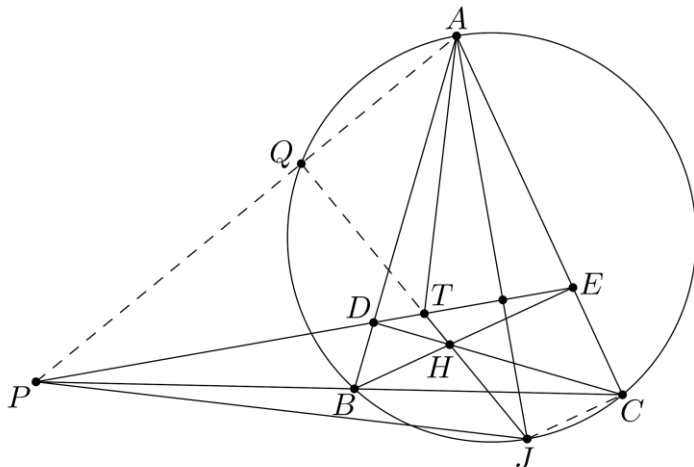
四、（本题满分 50 分）

已知 p 为大于 2022 的质数，求证：存在正整数 m, n, t 使 $m + n + t < \frac{2}{3}p + 2022$ ，

且 $p \mid 2^m \cdot 3^n \cdot 5^t - 1$ 。

考试时间：2022 年 7 月 26 日上午 9:40 — 12:30

如图, 锐角 $\triangle ABC$ 的垂心为 H , CD 、 BE 分别为 AB 、 AC 边上的高. 延长 ED 、 CB 交于 P , AJ 为 $\triangle ABC$ 外接圆的直径, 延长 JH 交 DE 于 T , 连结 JP . 证明: $AT \perp JP$. (答题时请将图画在答卷纸上)



又因为 $AC \perp JC$, 有 $AJ \perp PE$.

注意到 B, D, E, C 四点共圆, 以及 B, C, Q, A 四点共圆, 可得

$$\begin{cases} PB \cdot PC = PD \cdot PE \\ PB \cdot PC = PQ \cdot PA \end{cases} \Rightarrow PD \cdot PE = PQ \cdot PA$$

.....20 分

.....30 分

所以 T 为 $\triangle APJ$ 的垂心, 从而 $AT \perp JP$.

.....40 分

二、(本题满分 40 分)

给定正整数 n ，非负实数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 4$ ，记

$$S = a_1 + a_1 a_2 + \dots + a_1 a_2 \cdots a_n,$$

求 S 的最大值.

解: $n=1$ 时显然; $n=2$ 时, 由均值不等式:

$$a_1 + a_1 a_2 = a_1 (1 + a_2) \leq \frac{1}{4} (a_1 + a_2 + 1)^2 = \frac{25}{4},$$

且当 $a_1 = \frac{5}{2}, a_2 = \frac{3}{2}$ 时能取到.

当 $n \geq 3$ 时,

$$a_1 + a_1 a_2 + a_1 a_2 a_3 = a_1 + a_1 a_2 (1 + a_3) \leq a_1 + \frac{a_1}{4} (a_2 + a_3 + 1)^2 = a_1 + \frac{a_1}{4} (5 - a_1)^2,$$

其中 $a_1 \in [0, 4]$, 由函数单调性可知: 当 $a_1 = \frac{10 - \sqrt{13}}{3}$ 时, 函数取得最大值

$$\frac{305 + 13\sqrt{13}}{54}, \text{ 此时 } a_2 = \frac{\sqrt{13} + 5}{6}, a_3 = \frac{\sqrt{13} - 1}{6}$$

.....10 分

下归纳证明: 当 $n \geq 4$ 时, 均有上述最大值, 且当 a_1, a_2, a_3 为上述取值,

$a_4 = a_5 = \dots = a_n = 0$ 时能取到。

当 $n=4$ 时, 注意到 $a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) = 4$, 利用 $n=3$ 时的归纳假设, 只用证明:

$$a_1 + a_1 a_2 + a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_3 a_4 \leq a_1 + a_1 a_2 + a_1 a_2 (a_3 + a_4).$$

注意到可以不妨序列 $\{a_n\}$ 递减, 不然交换两个递增的项, 函数值变大, 如果 $a_3 \leq 1$,

平凡成立; 下设 $a_3 > 1$, 此时, $2 > a_1 \geq a_2 \geq a_3 > 1 > a_4$.

作调整 $(a_1, a_2, a_3, a_4) \rightarrow (a_1 + a_3 - 1, a_2, 1, a_4)$ 后, 函数值变大. 故可划归为 $a_3 \leq 1$ 的情形.

.....30 分

假设当 $n=k$ 成立, 当 $n=k+1$ 时, 注意到: $a_1 + a_2 + \dots + (a_k + a_{k+1}) = 4$ 并利用 $n=k$

时的归纳假设, 由于 $k \geq 4$, 故在的 $\{a_n\}$ 递减的条件下, 有 $a_k \leq 1$, 证明完成.

.....40 分

三、(本题满分 50 分)

求所有的正整数 n , 存在一种方案将集合 $\{1, 2, \dots, 2n\}$ 划分为 n 个元素个数为 2, 且两两不交的集合 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 使得不存在 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 同时满足

$$(1) \ x_i \in A_i (i=1, 2, \dots, n) \quad (2) \ 2n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

解: 答案为所有正偶数.

一方面, 当 $2 \mid n$ 时, 取 $A_i = \{i, i+n\} (i=1, 2, \dots, n)$. 则对任意的 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 满足 $x_i \in A_i (i=1, 2, \dots, n)$, 均有 $\sum_{i=1}^n x_i \equiv 1+2+\dots+n \equiv \frac{n}{2} \pmod{n}$.

.....20 分

另一方面, 当 n 为奇数时, 我们证明对任意一种划分方式, 均可选出合题意的 $x_1, x_2, \dots, x_n$.

以 $1, 2, \dots, 2n$ 为顶点造一个图, 对每个 $1 \leq i \leq n$, 在 $i, i+n$ 之间连红边, A_i 的两个元素之间连蓝边, 那么每个顶点均恰好连了一条红边, 一条蓝边. 于是此图为若干圈的并(此处允许圈长为 2). 又注意到圈上的边必为红蓝交替, 故图中的圈均为偶圈.

.....30 分

我们在每个圈上任取一个起点, 并取从起点开始的第 1, 3, 5, ... 个点. 那么所有圈中恰取了 n 个点, 设它们为 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 并设剩下的点为 $b_1, b_2, \dots, b_n$. 由我们的取法可知 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 两两不属于同一个 A_i 且两两模 n 不同余. 故 $\sum_{i=1}^n a_i \equiv 1+2+\dots+n \equiv 0 \pmod{n}$. 同理 $\sum_{i=1}^n b_i \equiv 1+2+\dots+n \equiv 0 \pmod{n}$. 又因为 $\sum_{i=1}^n a_i + b_i \equiv 1+2+\dots+2n \equiv n \pmod{2n}$, 故 a, b 中恰有一组数满足此组数之和是 $2n$ 的倍数, 这组数即为所求 $x_1, x_2, \dots, x_n$.

.....50 分

四、(本题满分 50 分)

已知 p 为大于 2022 的质数, 求证: 存在正整数 m, n, t 使 $m+n+t < \frac{2}{3}p + 2022$,
且 $p \mid 2^m \cdot 3^n \cdot 5^t - 1$.

证明: 不妨设 2 模 p 的阶不小于 3、5 模 p 的阶, 设 2 模 p 的阶为 r , 则 $r \mid p-1$.

(1) 当 $r = p-1$ 时, $2^1, 2^2, \dots, 2^{p-1}$ 构成模 p 的缩系.

故存在 $1 \leq i, j \leq p-1$, 使 $2^i \equiv 3 \pmod{p}$, $2^j \equiv 5 \pmod{p}$, 且由 $p > 2022$ 知 $11 \leq i, j \leq p-2$. 于是 $2^m \cdot 3^n \cdot 5^t \equiv 2^m \cdot 2^{ni} \cdot 2^{tj} = 2^{m+ni+tj} \pmod{p}$.

.....10 分

令 $m+ni+tj=2(p-1)$, 不妨设 $i \leq j$,

①若 i, j 均不小于 $\frac{2(p-1)}{3}$, 则取 $n=t=1$, 则 $m=2(p-1)-i-j \in \mathbb{N}^+$, 且
 $m+n+t=2p-i-j \leq 2p-\frac{4(p-1)}{3} = \frac{2}{3}p + \frac{4}{3} < \frac{2p}{3} + 2022$.

②若 $j \geq \frac{2(p-1)}{3}$, $i < \frac{2(p-1)}{3}$,

则取 $t=1$, 取 $m \in [1, i]$ 且 $m \equiv 2(p-1)-j \pmod{i}$, 则 $n = \frac{2(p-1)-j-m}{i} \in \mathbb{N}^+$,

此时, $m+n+t = m + \frac{2(p-1)-j-m}{i} + 1 = m\left(1-\frac{1}{i}\right) + \frac{2(p-1)-j}{i} + 1 \leq i + \frac{2(p-1)-j}{i}$
 $< i + \frac{2(p-1)}{i}$,

$\because 11 \leq i < \frac{2(p-1)}{3}$,

$\therefore$ 上式 $\leq \max \left\{ 11 + \frac{2(p-1)}{11}, \frac{2(p-1)}{3} + \frac{2(p-1)}{2(p-1)} \right\} = \max \left\{ \frac{2p}{11} + \frac{9}{11}, \frac{2p}{3} + \frac{7}{3} \right\} < \frac{2p}{3} + 2022$.

.....20 分

③若 $i, j < \frac{2(p-1)}{3}$,

记 $q \in [j+1, 2j]$, 且 $q \equiv 2(p-1) \pmod{j}$, 令 $m+ni=q$, 则 $t = \frac{2(p-1)-q}{j} \in \mathbb{N}^+$,

再取 $m \in [1, i]$ 使 $m \equiv q \pmod{i}$, 则 $n = \frac{q-m}{i} \in \mathbb{N}^+$,

从而

$m+n+t = m + \frac{q-m}{i} + \frac{2(p-1)-q}{j} = m\left(1-\frac{1}{i}\right) + \frac{q}{i} + \frac{2(p-1)-q}{j} \leq i-1 + \frac{q}{i} + \frac{2(p-1)-q}{j}$ ※

$\because 11 \leq i \leq j$, 且 $11j > 2j \geq q$,

$$\therefore * \leq j-1 + \frac{q}{j} + \frac{2(p-1)-q}{j} = j + \frac{2(p-1)}{j} - 1 \leq \max \left\{ 11 + \frac{2(p-1)}{11} - 1, \frac{2(p-1)}{3} + \frac{2(p-1)}{2(p-1)} - 1 \right\} \\ < \frac{2}{3}p + 2022.$$

.....30 分

(2) 当 $r = \frac{p-1}{2}$ 时, 记 $I = \left\{ 2^i \pmod{p} \mid 1 \leq i \leq \frac{p-1}{2} \right\}$, 下证必存在 $l, s \in \{1, 2\}$, 使 $3^l, 5^s \in I$.

否则 $3, 9 \notin I$, 则 $I, 3I, 9I$ 两两不交, 但 $I \cup 3I \cup 9I \subseteq \{1, 2, \dots, p-1\}$,

从而 $3 \cdot \frac{p-1}{2} \leq p-1$, 矛盾, 故存在 $l \in \{1, 2\}$ 使 $3^l \in I$, 同理存在 $s \in \{1, 2\}$ 使 $5^s \in I$.

设 $3^l \equiv 2^\alpha \pmod{p}$, $5^s \equiv 2^\beta \pmod{p}$, $1 \leq \alpha, \beta < \frac{p-1}{2}$.

①若 $\alpha + \beta < \frac{p-1}{2}$, 取 $m = \frac{p-1}{2} - \alpha - \beta$, $n = l$, $t = s$,

则 $2^m \cdot 3^n \cdot 5^t \equiv 2^{\frac{p-1}{2} - \alpha - \beta} \cdot 2^\alpha \cdot 2^\beta = 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$, 且 $m + n + t < \frac{p-1}{2} + 2 + 2 < \frac{2}{3}p + 2022$.

②若 $\alpha + \beta \geq \frac{p-1}{2}$, 取 $m = p-1 - \alpha - \beta$, $n = l$, $t = s$,

则 $2^m \cdot 3^n \cdot 5^t \equiv 2^{p-1-\alpha-\beta} \cdot 2^\alpha \cdot 2^\beta = 2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$,

且 $m + n + t = p-1 - \alpha - \beta + l + s \leq \frac{p-1}{2} + 2 + 2 < \frac{2}{3}p + 2022$.

.....40 分

(3) 当 $r \leq \frac{p-1}{3}$, 设 $r = \frac{p-1}{u}$ ($u \in \mathbb{N}^+$, $u \geq 3$), 类似 (2) 可知存在 $l, s \in \{1, 2, \dots, u\}$,

使 $3^l \equiv 2^\alpha$, $5^s \equiv 2^\beta \pmod{p}$, $1 \leq \alpha, \beta \leq \frac{p-1}{u}$.

①若 $u \geq 5$, 记 3 模 p 的阶为 r_1 , 5 模 p 的阶为 r_2 ,

取 $m = \frac{p-1}{u}$, $n = r_1$, $t = r_2$, 则 $2^m \cdot 3^n \cdot 5^t \equiv 1 \cdot 1 \cdot 1 \equiv 1 \pmod{p}$, 且

$m + n + t \leq 3 \cdot \frac{p-1}{u} \leq \frac{3(p-1)}{5} < \frac{2}{3}p + 2022$.

②若 $3 \leq u \leq 4$, 则 $3^1, 3^2, \dots, 3^u$ 模 p 均不余 1, 从而 $\alpha < \frac{p-1}{u}$,

取 $m = \frac{2(p-1)}{u} - \alpha - \beta$, $n = l$, $t = s$, 则

$2^m \cdot 3^n \cdot 5^t \equiv 2^{\frac{2(p-1)}{u} - \alpha - \beta} \cdot 2^\alpha \cdot 2^\beta = 2^{\frac{2(p-1)}{u}} \equiv 1 \pmod{p}$, 且 $m + n + t < \frac{2}{3}(p-1) + 4 + 4 < \frac{2}{3}p + 2022$.

综上, 命题得证.

.....50 分