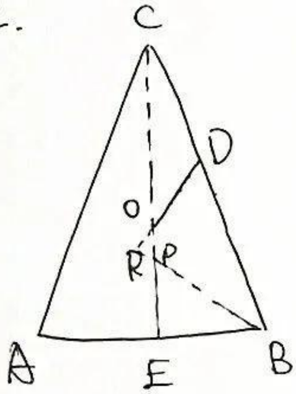
2020 年清华大学强基计划试题解析

1. 设 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ 其中 $\theta\in[0,2\pi)$ $r\in[0,1]$

$$\therefore\ x^2+xy-y^2=r^2\cos2\theta+\frac{1}{2}r^2\sin2\theta\le r^2\cdot\frac{\sqrt5}{2}=\frac{\sqrt5}{2}$$

$$x^2+xy-y^2\ge-\frac{\sqrt5}{2}r^2\ge-\frac{\sqrt5}{2}$$

2.



设DO交BP于R，E为AB中点

则 $\angle R=\angle CEB=90^\circ$

$\therefore$ O,R,E,B共圆

$\therefore \angle CBP=\angle RBE=\angle ROP$

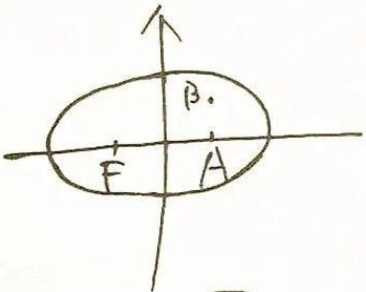
$\therefore$ O,D,B,P共圆

3. 若C已确定，则(A,B)共有 4^S 种方式

其中S为集合C的元素个数.

$$\therefore\ \sum_{S=1}^{2020}S\cdot4^S=\frac{4}{9}\left((3S-1)4^S+1\right)\Big|_{S=2020}=\frac{4}{9}\left(4^{2020}\times6059+1\right)$$

5. 设左焦点为 $F(-1,0)$



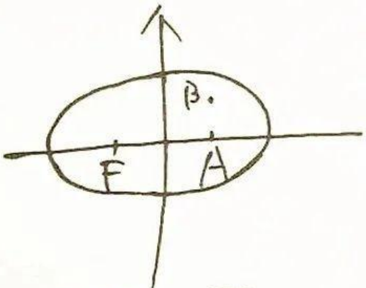
$PA+PB=4-PF+PB$

$\therefore PA+PB\in[4-FB,4+FB]$

又 $FB=\sqrt{5}$，

$\therefore PA+PB\in[4-\sqrt{5},4+\sqrt{5}]$

5. 设左焦点为 $F(-1,0)$



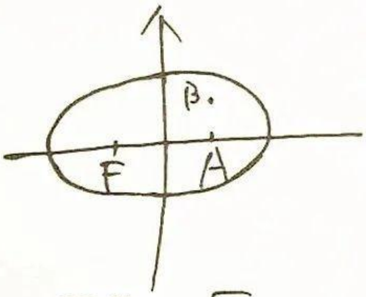
$PA+PB=4-PF+PB$

$\therefore PA+PB\in[4-FB,4+FB]$

又 $FB=\sqrt{5}$，

$\therefore PA+PB\in[4-\sqrt{5},4+\sqrt{5}]$

5. 设左焦点为 $F(-1,0)$



$PA+PB=4-PF+PB$

$\therefore PA+PB\in[4-FB,4+FB]$

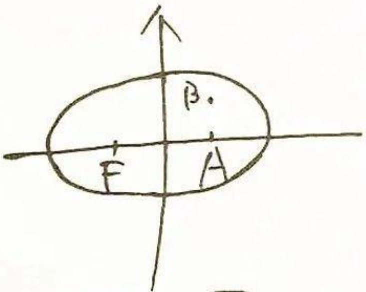
又 $FB=\sqrt{5}$，$\therefore PA+PB\in[4-\sqrt{5},4+\sqrt{5}]$

5. 设左焦点为 $F(-1,0)$

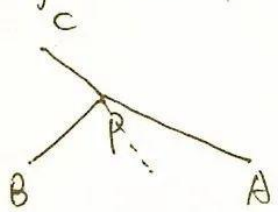
$PA+PB=4-PF+PB$

$\therefore PA+PB\in[4-FB,4+FB]$

又 $FB=\sqrt{5}$，$\therefore PA+PB\in[4-\sqrt{5},4+\sqrt{5}]$



9. 易知以 $\frac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|}$，$\frac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|}$ 为邻边的平行四边形为菱形，故对角线互相平分顶角。

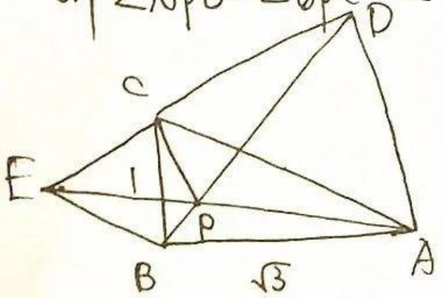


又PC所在直线平分$\angle BPA$，

$\therefore \angle CPB=\angle CPA$.

同理 $\angle CPB=\angle BPA$.

即 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120^\circ$，P为费马点。



$\triangle ACD$、$\triangle BCE$均为正三角形，易知AE与BD交点即为P点，且E、C、D共线。

由上述可知 $\angle BCD=\angle BPC=120^\circ$，$\therefore \triangle BCP \sim \triangle BCD$

$\therefore \frac{BP}{CP}=\frac{BC}{CD}=\frac{BC}{CA}=\frac{1}{2}$ 即 $CP=2BP$

同理 $\frac{AP}{CP}=\frac{AC}{EC}=\frac{AC}{BC}=2$ 即 $AP=2CP$

$\therefore$ 答案为ABCD

10. 设 $\arctan\frac{2}{k^2}=\theta$，则 $\tan\theta=\frac{2}{k^2}=\frac{k+1-(k-1)}{1+(k+1)(k-1)}=\tan(\alpha-\beta)$

$\therefore\ \theta=\alpha-\beta$ 即 $\arctan\frac{2}{k^2}=\arctan(k+1)-\arctan(k-1)$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{2}{k^2}=\arctan 2-\arctan 0+\arctan 3-\arctan 1+\arctan 4-\arctan 2+\cdots+\arctan(n+1)-\arctan(n-1)$$

$$=\arctan n+\arctan(n+1)-\frac{\pi}{4}$$

$$=\pi-\arctan\frac{2n+1}{n^2+n-1}-\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{2}{k^2}=\frac{3}{4}\pi.$$

11. $396=9\times4\times11$

先考虑被9整除的组合.

1,8　2,7.　3,6,　4,5　任意2组 $+0,9$.　(1)

12348,　12357　12456　(2)

126,　135,　234　$+09$　(3)

再考虑被11整除　(1)中只能加0.

最后考虑被4整除，12357舍去　135+09舍去

(2)所有情况数为 $A_2^2+A_2^2+A_2^2+A_2^2=8$

(3)所有情况数为 $2A_2^2+2A_2^2=8$

(1)的所有情况为 $C_4^2\times2\times A_2^2+C_4^2\times2\times A_2^2=48$

综上共有 $8+8+48=64$ 种.

故概率为 $\frac{64}{A_{10}^5}=\frac{2}{945}$

13. $|\vec{a}-2\vec{b}|=|\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}|\geq|\vec{c}|-|\vec{a}+2\vec{b}|$

$\Rightarrow |\vec{c}|\leq|\vec{a}-2\vec{b}|+|\vec{a}+2\vec{b}|$ (*)

又 $|\vec{a}-2\vec{b}|^2+|\vec{a}+2\vec{b}|^2=2(|\vec{a}|^2+|2\vec{b}|^2)\leq 10$

$\therefore$ 由柯西不等式知 (*)右 $\leq 2\sqrt{5}$

$\therefore |\vec{c}|\leq 2\sqrt{5}$ 当 $\vec{a}=(0,1)$, $\vec{b}=(1,0)$ 时取到

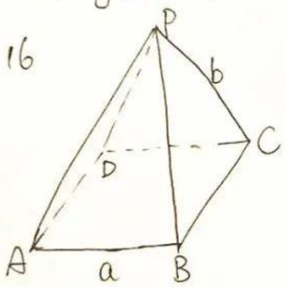
若 $|\vec{c}|=0$, 则只需 $\vec{a}\perp\vec{b}$, 即可符合题意

15. $z_1=3+i$ $z_2=2+i$ $z_3=1+i$

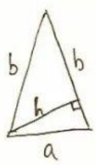
$\therefore z_1z_2z_3=(5+5i)(1+i)=10i$

$\therefore \arg(z_1\cdot z_2\cdot z_3)=\frac{\pi}{2}$ 即原式 $=1$

16



$\cos\beta=\frac{\sqrt{2}a}{2b}$ 即 $\tan\beta=\frac{\sqrt{2b^2-a^2}}{a}$



$h\cdot b=a\cdot\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$

$h=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-\frac{1}{4}a^2}$

$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{2}a}{2h}$

$\therefore \cos\alpha=1-2\cdot\frac{a^2}{2h^2}$

$=1-\frac{a^2}{h^2}$

$=1-\frac{b^2}{b^2-\frac{1}{4}a^2}=\frac{-\frac{1}{4}a^2}{b^2-\frac{1}{4}a^2}$

因 $\tan^2\beta=2\frac{b^2}{a^2}-1$

$\cos\alpha=\frac{a^2}{a^2-4b^2}$

$=\frac{1}{1-4\frac{b^2}{a^2}}$

$\frac{1}{\cos\alpha}=1-4\frac{b^2}{a^2}=1-2(1+\tan^2\beta)$

$\therefore \frac{1}{\cos\alpha}=-1-2\tan^2\beta$

17. $f(x)-1=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}+\sin x$，右边是奇函数，

∴ $f(x)$ 关于 $(0,1)$ 对称 且值域为 $(1-M, M+1)$

∴ 值域端点和为 2.（无最值）.

注. $f(x)=2-\frac{2e^{-x}}{e^x+e^{-x}}+\sin x=2-\frac{2}{e^{2x}+1}+\sin x$

$x_0=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $\leq 3-\frac{2}{e^{2x_0}+1}$

故 $f(x)$ 无最值，原题应改为上下确界之和.

18. $S(t)=\int_a^t f(x)\,dx$. ∴ $S'(t)=f(t)\leq f(c)$

∴ $S'(t)_{max}=f(c)$ $f'(x)_{max}\leq f'(a)$

19. (1) $S_n=1+1+2+\cdots+2^{n-2}$

$=1+\frac{1-2^{n-1}}{1-2}=2^{n-1}$

$\therefore \forall n\in N^*$ 取 $m=n+1$ 使得 $S_n=a_m$ 成立.

(2) 若 $k=0$，显然成立.

若 $k\neq 0$，则取 $m=\frac{n(n+1)}{2}$ 使 $S_n=a_m$ 成立

(4) 因 a_n 为等差数列. 设 $a_n=kn+m_0$.

取 $b_n=kn$. $c_n=\begin{cases} m_0 & n=1 \\ 0 & n\geq 2\end{cases}$

对 c_n. 显然是某数列 $S_n'\equiv m_0$ 则 $m=1$ 即可

故选 ABD

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》