炎德·英才大联考湖南师大附中2023届模拟试卷(二)

数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	A	C	C	D	C	B	BC	ABD	ABC	ABD

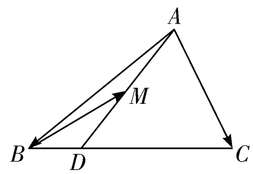
一、单项选择题:本大题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. A **【解析】**$\bar{z}=\frac{1-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=\frac{(1-\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}=\frac{1-3\mathrm{i}}{5}$,$\therefore z=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\mathrm{i}$.故复平面内对应的点在第一象限.选A.

2. B **【解析】**方程$x^2-4x+4a=0$有实根,故$\Delta=16-16a\geqslant0$,$\therefore a\in(-\infty,1]$;函数$f(x)=(2-a)^x$为增函数,故$2-a>1$,$\therefore a\in(-\infty,1)$,所以$p$是$q$的必要不充分条件.

3. A **【解析】**$a=0.3^{0.4}<0.3^0=1$,$b=0.4^{0.3}<0.4^0=1$,$c=\log_{0.4}0.3>\log_{0.4}0.4=1$,故$c$最大;$0.3^{0.4}<0.3^{0.3}<0.4^{0.3}$,$\therefore a<b$,故$a<b<c$.

4. C **【解析】**因为点D在边BC上,所以存在$t\in\mathbf{R}$,



使得$\overrightarrow{BD}=t\overrightarrow{BC}=t(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$.

因为M是线段AD的中点,所以$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD})=\frac{1}{2}(-\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}-t\overrightarrow{AB})=-\frac{1}{2}(t+1)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}t\overrightarrow{AC}$.

又$\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$,

所以$\lambda=-\frac{1}{2}(t+1)$,$\mu=\frac{1}{2}t$,所以$\lambda+\mu=-\frac{1}{2}$.

5. C **【解析】**对于A,设2层数据分别记为$x_1,x_2,\cdots,x_m$;$x_1,x_2,\cdots,x_n$,因为$\overline{x_1}=\overline{x_2}$,所以总体样本平均数为$\bar{x}=\frac{m\overline{x_1}+n\overline{x_2}}{m+n}=\frac{m\overline{x_1}+n\overline{x_1}}{m+n}=\overline{x_1}=\overline{x_2}$,所以$s_1^2=\frac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i-\overline{x_1})^2=\frac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i-\bar{x})^2$,$s_2^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j-\overline{x_2})^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x})^2$,

所以总体方差$s^2=\frac{1}{m+n}\left[\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i-\bar{x})^2+\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x})^2\right]=\frac{1}{m+n}(ms_1^2+ns_2^2)$,只有当$m=n$时,$s^2=\frac{1}{2}(s_1^2+s_2^2)$才成立,A错误;

对于B,相关性越强,$|r|$越接近于1,B错误;

对于C,若$P(X\geqslant-1)+P(X\geqslant5)=1$,则$P(X\geqslant-1)=P(X<5)$,$\therefore\mu=\frac{5+(-1)}{2}=2$,C正确;

对于D,由$6\times30\%=1.8$,$6\times50\%=3$,得甲组:第30百分位数为30,第50百分位数为$\frac{37+m}{2}$,

乙组:第30百分位数为n,第50百分位数为$\frac{33+44}{2}=\frac{77}{2}$,

解得$n=30$,$m=40$,故$m+n=70$,D错误.

6. D **【解析】**$f(x)=(\sqrt{3}\sin x+a\cos x)\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+a\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{a}{2}\cos 2x+\frac{a}{2}$,

$f(x)$的图象关于点$\left(-\frac{\pi}{6},\frac{3}{2}\right)$对称,$\therefore\frac{a}{2}=\frac{3}{2}$,$\therefore a=3$,

$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{3}{2}\cos 2x+\frac{3}{2}=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{3}{2}$.

故$f(x)$的最小正周期是$\frac{2\pi}{2}=\pi$,故A错误;

$x\in\left[\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$时,$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{5\pi}{3},3\pi\right]$,函数$f(x)$先增后减,故B错误;

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}$,故$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$不是函数$f(x)$的对称中心,C错误;

先将$f(x)$图象上各点的横坐标压缩为原来的$\frac{1}{2}$,可得$y=\sqrt{3}\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{3}{2}$的图象;

再将所得的函数图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度,得到函数$g(x)=\sqrt{3}\sin\left(4x+\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{3}{2}$的图象,$g(x)=\sqrt{3}\sin\left(4x+\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{3}{2}=\sqrt{3}\cos\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{3}{2}$,故D正确.

7. C **【解析】**因为$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的偶函数,在$[0,+\infty)$上单调递减,且$f(3)=0$,所以$f(x)$在$(-\infty,0]$上单调递增,且$f(-3)=0$.

则当$x>3$或$x<-3$时,$f(x)<0$;当$-3<x<3$时,$f(x)>0$.

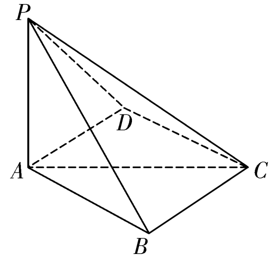
不等式$(2x-5)f(x-1)<0$化为$\begin{cases}2x-5>0\\f(x-1)<0\end{cases}$或$\begin{cases}2x-5<0\\f(x-1)>0\end{cases}$.

所以$\begin{cases}2x-5>0\\x-1>3\end{cases}$或$\begin{cases}2x-5>0\\x-1<-3\end{cases}$或$\begin{cases}2x-5<0\\-3<x-1<3\end{cases}$,

解得$x>4$或$x\in\varnothing$或$-2<x<\dfrac{5}{2}$,

即$-2<x<\dfrac{5}{2}$或$x>4$,即原不等式的解集为$\left(-2,\dfrac{5}{2}\right)\cup(4,+\infty)$.

8. B 【解析】以四边形$ABCD$的外接圆为底,PA为高,将四棱锥补形为一个已知球的内接圆柱.



设内接圆柱的底面半径为r,外接球的半径为R,则$R^2=2^2+r^2$,

$V=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}\cdot PA=\dfrac{4}{3}S_{ABCD}\geqslant\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$,故$S_{ABCD}\geqslant\sqrt{3}$,

$S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{1}{2}AD\cdot DC\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(AB\cdot BC+AD\cdot DC)$,

所以$AB\cdot BC+AD\cdot DC\geqslant 4$.

在$\triangle ABC$中运用余弦定理与基本不等式得:

$AC^2=AB^2+BC^2+AB\cdot BC\geqslant 3AB\cdot BC$,当且仅当$AB=BC$时取等号,

在$\triangle ADC$中运用余弦定理与基本不等式得:$3AC^2=3(AD^2+DC^2-AD\cdot DC)\geqslant 3AD\cdot DC$,

上两式相加得:$4AC^2\geqslant 3(AB\cdot BC+AD\cdot DC)\geqslant 12$,

故有:$AC^2\geqslant 3$.

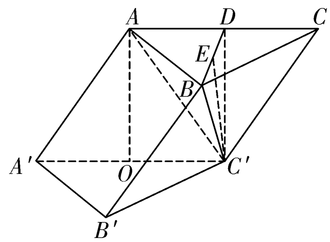
在$\triangle ABC$中由正弦定理得:$2r=\dfrac{AC}{\sin\dfrac{2\pi}{3}}$,

$\therefore r=\dfrac{\sqrt{3}}{3}AC$,$r^2=\dfrac{1}{3}AC^2\geqslant 1$,

因此$R^2=2^2+r^2\geqslant 5$,$S=4\pi R^2\geqslant 20\pi$.故选B.

二、多项选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得5分,有选错的得0分,部分选对的得2分.

9. BC 【解析】三棱柱$ABC-A'B'C'$中,棱长均为2,令$A'C'$中点为O,连AO,如图,



依题意$AO\perp$平面$A'B'C'$,又$A'C'\subset$平面$A'B'C'$,所以$AO\perp A'C'$,又点O为$A'C'$的中点,所以$AC'=AA'$,则三角形$AA'C'$为等边三角形,

可得$AO=\sqrt{3}$,而$S_{\triangle A'B'C'}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}A'C'^2=\sqrt{3}$,

因此三棱柱$ABC-A'B'C'$的体积$V_{ABC-A'B'C'}=S_{\triangle A'B'C'}\cdot AO=3$,A不正确;

由$AO\perp$平面$A'B'C'$知,$\angle AC'A'$是AC'与平面$A'B'C'$所成的角,则$\angle AC'A'=\dfrac{\pi}{3}$,B正确;

因D为AC的中点,又$AC'=CC'=2$,$AB=BC=2$,则有$C'D\perp AC$,$BD\perp AC$,$C'D\cap BD=D$,$C'D$,$BD\subset$平面$BC'D$,因此$AC\perp$平面$BC'D$,而$C'E\subset$平面$BC'D$,则$C'E\perp AC$,C正确;

由于$AD/\!/OC'$,$AD=OC'$,即四边形$AOC'D$是平行四边形,有$C'D/\!/AO$,则有$C'D\perp$平面$A'B'C'$,

又平面$ABC/\!/$平面$A'B'C'$,即有$C'D\perp$平面ABC,而$BD\subset$平面ABC,则$BD\perp C'D$,

因$BD\perp AC$,$AC\cap C'D=D$,AC,$C'D\subset$平面$ACC'A'$,于是得$BD\perp$平面$ACC'A'$,而$AA'\subset$平面$ACC'A'$,则$BD\perp AA'$,

而E是BD上的动点,因此异面直线AA'与BE所成角为$\dfrac{\pi}{2}$,D不正确.

故选BC.

10. ABD 【解析】$f(x)=ax^3+bx^2+\dfrac{5}{3}(ab\neq 0)$,$f'(x)=3ax^2+2bx$,$f''(x)=6ax+2b$,令$f''(x)=6ax+2b=0$,得$x=-\dfrac{b}{3a}$,

已知函数$f(x)=ax^3+bx^2+\dfrac{5}{3}(ab\neq 0)$图象的对称中心为$(1,1)$,

$\therefore\begin{cases}-\dfrac{b}{3a}=1\\f(1)=a+b+\dfrac{5}{3}=1\end{cases}$,解得$a=\dfrac{1}{3}$,$b=-1$,A正确;

所以$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+\dfrac{5}{3}$,由$f'(x)=x^2-2x=0$,得$x=0$或$x=2$,

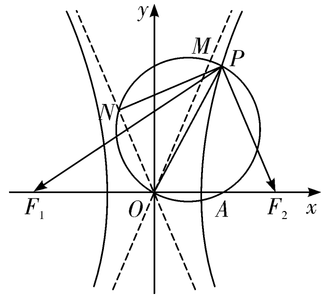
且当$x<0$或$x>2$时,$f'(x)>0$;当$0<x<2$时,$f'(x)<0$,

$\therefore f(x)$在$(-\infty,0)$和$(2,+\infty)$上都是增函数,在$(0,2)$上是减函数,D正确;

$\therefore$函数$f(x)$既有极大值$f(0)=\dfrac{5}{3}$,又有极小值$f(2)=\dfrac{1}{3}$,B正确;

$\because$极小值$f(2)=\dfrac{1}{3}>0$,$\therefore$函数$f(x)$不可能有三个零点,C错误.

11. ABC 【解析】设 $P(x_0,y_0)$，点 $P(x_0,y_0)$ 到渐近线 $y=\frac{b}{a}x$ 的距离为 $|PM|=\frac{|bx_0-ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，



同理 $|PN|=\frac{|bx_0+ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，则 $|PM|\cdot|PN|=\frac{|b^2x_0^2-a^2y_0^2|}{a^2+b^2}$，

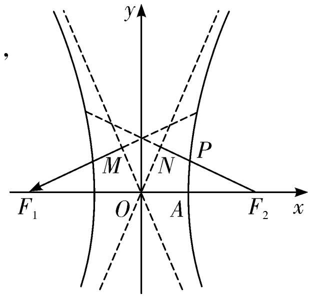
$\because \frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$，即 $b^2x_0^2-a^2y_0^2=a^2b^2$，

$\therefore |PM|\cdot|PN|=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$（定值），故 A 正确；

当 M、N 均不与 O 重合时，由 $\angle OMP=\angle ONP=90°$，$\therefore \triangle OMP$ 和 $\triangle ONP$ 均为直角三角形，故 M，N 两点在以 OP 为直径的圆上；

当 M、N 有与 O 重合时，也满足 O、P、M、N 四点共圆. 故 B 正确；

由双曲线的对称性可知 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OF_1})\cdot(\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{OF_1})=|\overrightarrow{PO}|^2-|\overrightarrow{OF_1}|^2=|\overrightarrow{PO}|^2-c^2$，其中 $c^2=a^2+b^2$，



$\because |\overrightarrow{PO}|^2\geqslant a^2$，$\therefore \overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}\geqslant a^2-c^2=-b^2$ 成立，故 C 正确；

如图，利用双曲线的对称性，不妨设直线 F_1M 垂直一条渐近线，垂足为 M；

直线 F_2N 垂直另一条渐近线且交双曲线于点 P，易知直线 F_1M 与直线 F_2N 的交点始终落在 y 轴上，故 D 不正确.

故选：ABC.

12. ABD 【解析】由直线 $x=a$ 与两曲线 $y=\mathrm{e}^x$，$y=\ln x$ 分别交于 A，B 两点可知：$a>0$.

曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 上 A 点坐标 (a,e^a)，可求导数 $y'=\mathrm{e}^x$，则切线 m 斜率 $k_m=\mathrm{e}^a$，可知切线 m：$y-\mathrm{e}^a=\mathrm{e}^a(x-a)$.

曲线 $y=\ln x$ 上 B 点坐标 $(a,\ln a)$，可求导数 $y'=\frac{1}{x}$，则切线 n 斜率 $k_n=\frac{1}{a}$.

令 $k_m=k_n$，则 $\mathrm{e}^a=\frac{1}{a}$，令 $g(x)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{x}(x>0)$，$g\left(\frac{1}{2}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-2<0$，$g(1)=\mathrm{e}-1>0$，

由零点存在定理，$\exists a\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 使 $g(x)=0$，即 $\exists a\in(0,+\infty)$，使 $k_m=k_n$，即 $m/\!/n$，故 A 正确.

$|AB|=\mathrm{e}^a-\ln a$，令 $h(a)=\mathrm{e}^a-\ln a(a>0)$，$\therefore h'(a)=\mathrm{e}^a-\frac{1}{a}$，由 $g(x)$ 同理可知有 $a_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使 $\mathrm{e}^{a_0}=\frac{1}{a_0}$，令 $\begin{cases}h'(a)>0\Rightarrow a>a_0\\ h'(a)<0\Rightarrow 0<a<a_0\end{cases}$，$\therefore h(a)$ 在 $a=a_0$ 处取最小值，即当 $m/\!/n$ 时，$|AB|$ 取得最小值，故 B 正确.

$|AB|_{\min}=\mathrm{e}^{a_0}-\ln a_0$，$\because \mathrm{e}^{a_0}=\frac{1}{a_0}$，$\therefore a_0=\ln\frac{1}{a_0}=-\ln a_0$，$\therefore |AB|_{\min}=\frac{1}{a_0}+a_0$ 为定值，故 C 错误.

$|AB|_{\min}=\frac{1}{a_0}+a_0$ 是对勾函数，在 $a_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上是减函数，$\therefore |AB|_{\min}\in\left(\frac{1}{1}+1,\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\right)\Rightarrow |AB|_{\min}\in\left(2,\frac{5}{2}\right)$，$\because a_0>\frac{1}{2}$，

$\therefore \frac{1}{a_0}<2$，$\therefore \mathrm{e}^{a_0}<2=\mathrm{e}^{\ln 2}$，$\therefore a_0<\ln 2$，$\therefore \ln 2+\log_2\mathrm{e}=\frac{\ln 2}{\ln \mathrm{e}}+\frac{\ln \mathrm{e}}{\ln 2}=\ln 2+\frac{1}{\ln 2}<a_0+\frac{1}{a_0}$，故 D 正确. 故选：ABD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 80 【解析】在 $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^n$ 中令 $x=1$ 得展开式中各项系数的和为 $3^n=243$，求出 $n=5$.

$\therefore \left(2x+\frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式的通项 $T_{r+1}=\mathrm{C}_5^r\cdot(2x)^{5-r}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^r=2^{5-r}\cdot\mathrm{C}_5^r\cdot x^{5-2r}$，

令 $5-2r=3$，得 $r=1$，$\therefore T_{1+1}=2^4\cdot\mathrm{C}_5^1\cdot x^3=80x^3$.

故答案为：80.

14. $3x-4y-20=0$ 或 $x=4$

【解析】由题可知圆心 $(0,0)$，半径 $r=5$，弦长 $a=6$，设弦心距是 d，

则由勾股定理得：$r^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+d^2$，$\therefore d=4$，

若 l 斜率不存在，直线是 $x=4$，

若 l 斜率存在，设直线方程 $y+2=k(x-4)$，即 $kx-y-4k-2=0$，则 $d=\frac{|4k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=4$，解得 $k=\frac{3}{4}$，

所以所求直线方程为 $3x-4y-20=0$ 或 $x=4$.

15. $(-1,+\infty)$ 【解析】$f'(x)=2x$，$g'(x)=\frac{2}{x}$，

设与曲线 $f(x)=x^2+a$ 相切的切点为 (x_1,x_1^2+a)，与曲线 $g(x)=2\ln x$ 相切的切点为 $(x_2,2\ln x_2)$，

则切线方程为 $y=2x_1(x-x_1)+x_1^2+a$，即 $y=2x_1x-x_1^2+a$，

$y=\frac{2}{x_2}(x-x_2)+2\ln x_2$，即 $y=\frac{2}{x_2}x+2\ln x_2-2$，

由于两切线为同一直线，

所以 $\begin{cases}2x_1=\frac{2}{x_2},\\ -x_1^2+a=2\ln x_2-2,\end{cases}$ 得 $a=x_1^2-2\ln x_1-2(x_1>0)$.

令 $\varphi(x)=x^2-2\ln x-2(x>0)$，则 $\varphi'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x+1)(x-1)}{x}$，

当 $0<x<1$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 单调递减，

当 $x>1$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增.

即有 $x=1$ 处 $\varphi(x)$ 取得极小值，也为最小值，且为 -1.

又两曲线恰好存在两条公切线，即 $a=\varphi(x)$ 有两解，

结合当 $x\to 0$ 时，$\varphi(x)\to+\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$\varphi(x)\to+\infty$，

可得 a 的范围是 $(-1,+\infty)$.

16. $2+2\sqrt{5}$ 【解析】由 $-\frac{p}{2}+1=0$，解得：$p=2$，∴抛物线方程为：$x^2=4y$，准线方程为 $y=-1$，可得 $P(0,-1)$.

由题意可知，直线 AB 的斜率存在且不为 0.

设直线 AB 的方程为：$y=kx+1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

联立 $\begin{cases}y=kx+1,\\x^2=4y,\end{cases}$ 得 $x^2-4kx-4=0$.

由题意，$\Delta=16k^2+16>0$，则 $x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4$，

若以线段 BP 为直径的圆过点 A，由 $AB\perp AP$ 得，$k\cdot\frac{y_1+1}{x_1}=-1$，

即 $k\cdot\frac{kx_1+2}{x_1}=-1$，得 $x_1=\frac{-2k}{1+k^2}$，$y_1=kx_1+1=\frac{-k^2+1}{1+k^2}$，即 $A\left(\frac{-2k}{1+k^2},\frac{1-k^2}{1+k^2}\right)$，

∵A 在抛物线 $x^2=4y$ 上，∴$\left(\frac{-2k}{1+k^2}\right)^2=4\cdot\frac{1-k^2}{1+k^2}$，

化简得：$k^4+k^2-1=0$，解得：$k^2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$，

∴$|AB|=y_1+y_2+2=k(x_1+x_2)+4=4+4k^2=2+2\sqrt{5}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【解析】(1)∵点 (a_n,a_{n+1}) 在函数 $f(x)=x^2+2x$ 的图象上，∴$a_{n+1}=a_n^2+2a_n$，

∴$a_{n+1}+1=(a_n+1)^2$，∴$\{a_n+1\}$ 是"平方递推数列". ………………………… 2 分

因为 $\lg(a_1+1)=\lg(9+1)=1>0$，

对 $a_{n+1}+1=(a_n+1)^2$ 两边同时取对数得 $\lg(a_{n+1}+1)=2\lg(a_n+1)$，

∴数列 $\{\lg(a_n+1)\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列. ………………………… 4 分

(2)由(1)知 $b_n=\lg(a_n+1)=1\times2^{n-1}=2^{n-1}$，………………………… 5 分

由数列 $\{b_n\}$、$\{c_n\}$ 的通项公式得，

当 $n\leqslant4$ 时，$b_n<c_n$；当 $n>4$ 时，$b_n>c_n$.

又由 $a*b=\begin{cases}a,a\leqslant b,\\b,a>b,\end{cases}$ $d_n=b_n*c_n$，得 $d_n=\begin{cases}2^{n-1},n\leqslant4\text{ 且 }n\in\mathbf{N}^*,\\2n+4,n>4\text{ 且 }n\in\mathbf{N}^*.\end{cases}$ ………………………… 7 分

当 $n\leqslant4$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$S_n=b_1+\cdots+b_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$；………………………… 8 分

当 $n>4$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$S_n=b_1+b_2+b_3+b_4+c_5+c_6+\cdots+c_n$

$=(2^4-1)+\frac{(n-4)(14+2n+4)}{2}=n^2+5n-21$，………………………… 9 分

综上，$S_n=\begin{cases}2^n-1,n\leqslant4\text{ 且 }n\in\mathbf{N}^*,\\n^2+5n-21,n>4\text{ 且 }n\in\mathbf{N}^*.\end{cases}$ ………………………… 10 分

18.【解析】(1)列联表如下：

报考意向	报考意向人数		合计
	师范专业	非师范专业	
男生	80	580	660
女生	120	420	540
合计	200	1000	1200

………………………… 2 分

零假设 H_0：报考师范专业意向与性别无关，

∵$\chi^2=\frac{1200(80\times420-120\times580)^2}{200\times1000\times540\times660}\approx21.818>10.828$；………………………… 4 分

∴依据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验分析判断 H_0 不成立，即报考师范专业意向与性别有关，且这个判断错误的概率不大于 0.001. ………………………… 5 分

(2)据题已知，样本中男生为 4 人，女生为 6 人，………………………… 6 分

则 X 可取 0、1、2、3、4.

$P(X=0)=\frac{C_4^0C_6^5}{C_{10}^5}=\frac{1}{42}$，$P(X=1)=\frac{C_4^1C_6^4}{C_{10}^5}=\frac{5}{21}$，$P(X=2)=\frac{C_4^2C_6^3}{C_{10}^5}=\frac{10}{21}$，

$P(X=3)=\dfrac{C_4^3C_6^2}{C_{10}^5}=\dfrac{5}{21}$，$P(X=4)=\dfrac{C_4^4C_6^1}{C_{10}^5}=\dfrac{1}{42}$.

所求的分布列为：

X	0	1	2	3	4
P	$\dfrac{1}{42}$	$\dfrac{5}{21}$	$\dfrac{10}{21}$	$\dfrac{5}{21}$	$\dfrac{1}{42}$

………………………………………………………………………………………… 10 分

其期望值 $E(X)=1\cdot\dfrac{5}{21}+2\cdot\dfrac{10}{21}+3\cdot\dfrac{5}{21}+4\cdot\dfrac{1}{42}=2$. ………………………… 12 分

或：X 服从超几何分布，其分布列是 $P(X=k)=\dfrac{C_4^k\cdot C_6^{5-k}}{C_{10}^5}$，$k=0,1,2,3,4$，$E(X)=5\cdot\dfrac{4}{10}=2$.

19.【**解析**】(1)**法一**：由 $\sin A+\sin B=2\sin C$ 得：$a+b=2c$，即 $|CA|+|CB|=12>|AB|$，

则顶点 C 的轨迹是以 A、B 为焦点的椭圆(除去长轴的两个端点)，………………………… 3 分

易知当顶点 C 为椭圆的短轴的端点时△ABC 的面积最大，

此时 $a=b=c=6$，△ABC 是等边三角形，$C=\dfrac{\pi}{3}$，

所以 $(S_{\triangle ABC})_{\max}=\dfrac{1}{2}\cdot 6^2\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=9\sqrt{3}$. ………………………… 6 分

法二：由 $\sin A+\sin B=2\sin C$ 得：$a+b=2c=12$，

$\because \cos C=\dfrac{a^2+b^2-36}{2ab}=\dfrac{(a+b)^2-36-2ab}{2ab}=\dfrac{54-ab}{ab}$，

$\therefore \sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\dfrac{6}{ab}\sqrt{3ab-81}$， ………………………… 3 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=3\sqrt{3ab-81}\leqslant 3\sqrt{3\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2-81}=9\sqrt{3}$，当且仅当 $a=b$ 时取等号，

此时△ABC 是等边三角形，$C=\dfrac{\pi}{3}$，△ABC 的面积的最大值为 $9\sqrt{3}$. ………………………… 6 分

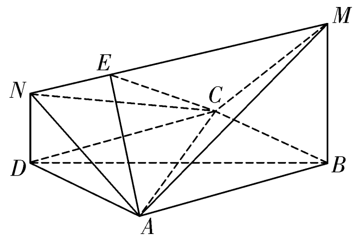
(2)由(1)有 $f(x)=\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，

当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$\omega x-\dfrac{\pi}{3}\in\left(-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\omega\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)$， ………………………… 8 分

$\because$ 函数 $f(x)=\sin(\omega x-\varphi)(\omega>0)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上恰有三个零点和两个极值点，

则 $2\pi<\dfrac{\omega\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{5\pi}{2}$，解得 $\dfrac{14}{3}<\omega\leqslant\dfrac{17}{3}$. ………………………… 12 分

20.【**解析**】(1)$\because BM\perp$ 平面 $ABCD$，



$\therefore AC\perp BM$，

又四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AC\perp BD$，

则 $AC\perp$ 平面 $BMND$，又 $AC\subset$ 平面 EAC，

则平面 $EAC\perp$ 平面 $BMND$. ………………………… 5 分

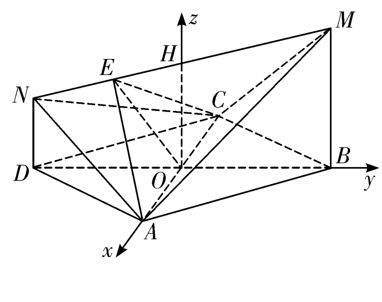
(2)由已知易知 $AE=CE>1$，

$\cos\angle AEC=\dfrac{2AE^2-AC^2}{2AE^2}=1-\dfrac{2}{AE^2}$，$\angle AEC\in(0,\pi)$，

$\therefore$ 当 AE 最短时$\angle AEC$ 最大，即 $AE\perp MN$(由(1)得此时 $CE\perp MN$)时$\angle AEC$ 最大，

此时，$\angle AEC$ 是二面角 A-MN-C 的平面角，大小是 $120°$，$AE=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$， ………………………… 7 分

取 MN 的中点 H，连 H 与 AC、BD 的交点 O，易知 $OH\subset$ 平面 $BMND$，



如图建系，设 $ND=a$，则 $A(1,0,0)$，$N(0,-\sqrt{3},a)$，$M(0,\sqrt{3},2a)$，

则 $\overrightarrow{AN}=(-1,-\sqrt{3},a)$，$\overrightarrow{AM}=(-1,\sqrt{3},2a)$.

设平面 AMN 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AM}=-x+\sqrt{3}y+2az=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AN}=-x-\sqrt{3}y+az=0\end{cases}\Rightarrow \boldsymbol{n}_1=\left(\dfrac{3a}{2},-\dfrac{\sqrt{3}a}{6},1\right)$，

同理求得平面 CMN 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=\left(-\dfrac{3a}{2},-\dfrac{\sqrt{3}a}{6},1\right)$，

$$|\cos\angle AEC|=\dfrac{\left|-\dfrac{9a^2}{4}+\dfrac{3a^2}{36}+1\right|}{\dfrac{9a^2}{4}+\dfrac{3a^2}{36}+1}=\dfrac{1}{2}，$$

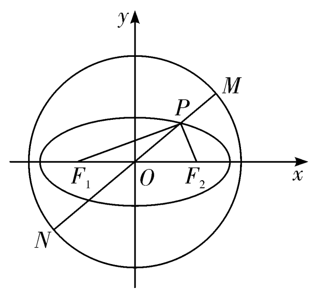
解之得：$a=\dfrac{\sqrt{15}}{10}$，或 $a=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$(此时$\angle AEC=\dfrac{\pi}{3}$，舍去). ………………………… 10 分

$MN=\sqrt{a^2+BD^2}=\sqrt{\frac{3}{20}+12}=\frac{9\sqrt{15}}{10}$，$S_{\triangle EAC}=\frac{1}{2}AE^2\sin 120^\circ=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$V_{M-NAC}=V_{M-EAC}+V_{N-EAC}=\frac{1}{3}S_{\triangle EAC}\cdot MN=\frac{3\sqrt{5}}{10}$. …………………………………………………………… 12 分

（采用几何计算类似给分）

21.【解析】(1)设 $P(x_0,y_0)$，由于 $|PF_1|+|PF_2|=2a\Rightarrow|PF_1|^2+|PF_2|^2+2|PF_1||PF_2|=4a^2$，



而 $|PF_1|\cdot|PF_2|=6$，则 $(x_0+c)^2+y_0^2+(x_0-c)^2+y_0^2+12=4a^2$，

所以 $x_0^2+y_0^2=2a^2-c^2-6=a^2-2$（其中 $a^2-c^2=4$）， …………………………………… 3 分

$|PM|\cdot|PN|=(|OM|-|OP|)(|ON|+|OP|)=|OM|^2-|OP|^2=a^2+4-(x_0^2+y_0^2)$

$=a^2+4-(a^2-2)=6$. ……………………………………………………………………………………… 6 分

(2)设 $R(m,n)$，则 $m^2+n^2=a^2+4$，即 $n^2-4=a^2-m^2$，

设过点 R 的圆 O 的切线斜率都存在时的方程：$y=k(x-m)+n$，$(m^2\neq a^2)$，代入椭圆方程得：

$4x^2+a^2[k^2(x-m)^2+n^2+2k(x-m)n]-4a^2=0$，

整理得：$(4+a^2k^2)x^2-2ka^2(km-n)x+a^2(km-n)^2-4a^2=0$， …………………………… 8 分

则 $\Delta=4a^4k^2(km-n)^2-4(4+a^2k^2)[a^2(km-n)^2-4a^2]=0$，

即 $(km-n)^2-a^2k^2-4=0\Rightarrow(m^2-a^2)k^2-2mnk+n^2-4=0$，

k_1,k_2 是上述关于 k 的方程的两个根，则 $k_1k_2=\frac{n^2-4}{m^2-a^2}=-1$，

即两条切线的斜率都存在时，有两条切线相互垂直； …………………………………………………… 11 分

而当过 R 的切线斜率不存在时，易知 R 点的坐标为 $(\pm a,\pm 2)$，

此时显然两条切线相互垂直，

综上，过圆 O 上任意点 R 引椭圆 C 的两条切线，则两条切线相互垂直. ………………………… 12 分

22.【解析】(1) $f'(x)=k\left(\frac{1}{x}-\frac{1-(1+\ln x)}{x^2}\right)=\frac{k(x+\ln x)}{x^2}$，…………………………………………………… 1 分

记 $\varphi(x)=x+\ln x$，易知 $\varphi(x)$ 单调递增，

又因为 $\varphi\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}-1<0$，$\varphi(1)=1>0$，

所以存在 $x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$，使得 $\varphi(x_0)=0$， ………………………………………………………………… 2 分

①当 $k>0$ 时，列表可知，$f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 无最大值，即 $k>0$ 不符题意； ………………………………………………………………… 3 分

②当 $k<0$ 时，列表可知，$f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(x)_{\max}=f(x_0)=1+k\left(\ln x_0-\frac{1+\ln x_0}{x_0}\right)$， …………………………………………………… 4 分

因为 $x_0+\ln x_0=0$，所以 $\ln x_0=-x_0$，所以 $f(x_0)=1-k\left(x_0+\frac{1}{x_0}-1\right)>1-k$，

所以 $f(x)_{\max}+k>1$，即 $M+k>1$. ……………………………………………………………………… 6 分

(2)由(1)可知 $k<0$，且 $M+k>1$，所以 $\frac{M-1}{k}<-1$，

$g'(x)=(x+1)e^{x+\frac{M-1}{k}}-1$，$g''(x)=(x+2)e^{x+\frac{M-1}{k}}$，令 $g''(x)=0$，解得 $x=-2$，

所以 $g'(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递减，在 $(-2,+\infty)$ 上单调递增. ……………………………… 7 分

当 $x\leqslant -1$ 时，$g'(x)<0$，又 $g'(0)=e^{\frac{M-1}{k}}-1<0$，$g'\left(\frac{1-M}{k}\right)=\frac{1-M}{k}>1$，

所以存在 $x_1\in\left(0,\frac{1-M}{k}\right)$，使得 $g'(x_1)=0$，

可知 $g(x)_{\min}=g(x_1)=x_1e^{x_1+\frac{M-1}{k}}-x_1$， …………………………………………………………… 9 分

因为 $g'(x_1)=0$，所以 $x_1+1=e^{-x_1+\frac{1-M}{k}}$，所以 $\ln(x_1+1)+x_1=\frac{1-M}{k}$，

由(1)可知，$\ln x_0=-x_0$，即 $\frac{1}{x_0}=e^{x_0}$，

则 $\frac{1-M}{k}=\frac{1+\ln x_0}{x_0}+x_0=e^{x_0}+x_0-1$，

所以 $\ln(x_1+1)+x_1=e^{x_0}+x_0-1$. …………………………………………………………………… 10 分

设 $\lambda(x)=\ln(x+1)+x$，易知 $\lambda(x)$ 单调递增，且 $\lambda(x_1)=\lambda(e^{x_0}-1)$，

所以 $x_1=e^{x_0}-1$，

所以 $g(x)_{\min}=x_1e^{x_1-(e^{x_0}+x_0-1)}-x_1=\frac{e^{x_0}-1}{e^{x_0}}+1-e^{x_0}=2-x_0-e^{x_0}=1+\frac{M-1}{k}$，

即 $g(x)$ 的最小值为 $1+\frac{M-1}{k}$. ……………………………………………………………………… 12 分