

绝密★本科目考试启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试

数学(理)(北京卷)

本试卷共5页,150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效。考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分(选择题 共40分)

一、选择题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项。

(1) 已知复数 $z = 2 + i$, 则 $z \cdot \bar{z} =$

- (A) $\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{5}$
(C) 3 (D) 5

(2) 执行如图所示的程序框图, 输出的 s 值为

- (A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4

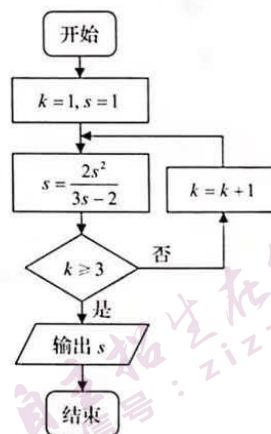
(3) 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 2 + 4t \end{cases}$ (t 为参数), 则点 $(1, 0)$

到直线 l 的距离是

- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$
(C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{6}{5}$

(4) 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 则

- (A) $a^2 = 2b^2$ (B) $3a^2 = 4b^2$
(C) $a = 2b$ (D) $3a = 4b$



(5) 若 x, y 满足 $|x| \leq 1 - y$, 且 $y \geq -1$, 则 $3x + y$ 的最大值为

- (A) -7 (B) 1
(C) 5 (D) 7

(6) 在天文学中, 天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述. 两颗星的星等与亮度满足 $m_2 - m_1 = \frac{5}{2} \lg \frac{E_1}{E_2}$, 其中星等为 m_k 的星的亮度为 E_k ($k=1, 2$). 已知太阳的星等是 -26.7 , 天狼星的星等是 -1.45 , 则太阳与天狼星的亮度的比值为

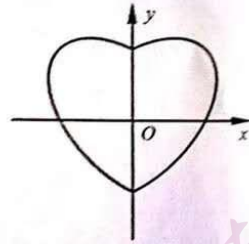
- (A) $10^{10.1}$ (B) 10.1
(C) $\lg 10.1$ (D) $10^{-10.1}$

(7) 设点 A, B, C 不共线, 则 “ \overline{AB} 与 \overline{AC} 的夹角为锐角” 是 “ $|\overline{AB} + \overline{AC}| > |\overline{BC}|$ ” 的

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(8) 数学中有许多形状优美、寓意美好的曲线, 曲线 $C: x^2 + y^2 = 1 + |x|y$ 就是其中之一 (如图). 给出下列三个结论:

- ① 曲线 C 恰好经过 6 个整点 (即横、纵坐标均为整数的点);
② 曲线 C 上任意一点到原点的距离都不超过 $\sqrt{2}$;
③ 曲线 C 所围成的“心形”区域的面积小于 3.



其中, 所有正确结论的序号是

- (A) ① (B) ②
(C) ①② (D) ①②③

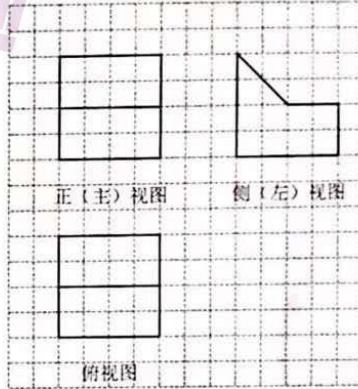
第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

(9) 函数 $f(x) = \sin^2 2x$ 的最小正周期是_____。

(10) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n 。若 $a_2 = -3$, $S_5 = -10$, 则 $a_5 =$ _____, S_n 的最小值为_____。

(11) 某几何体是由一个正方体去掉一个四棱柱所得, 其三视图如图所示。如果网格纸上小正方形的边长为 1, 那么该几何体的体积为_____。



(12) 已知 l, m 是平面 α 外的两条不同直线。给出下列三个论断:

- ① $l \perp m$; ② $m \parallel \alpha$; ③ $l \perp \alpha$ 。

以其中的两个论断作为条件, 余下的一个论断作为结论, 写出一个正确的命题:_____。

(13) 设函数 $f(x) = e^x + ae^{-x}$ (a 为常数)。若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $a =$ _____; 若 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的增函数, 则 a 的取值范围是_____。

(14) 李明自主创业, 在网上经营一家水果店, 销售的水果中有草莓、京白梨、西瓜、桃, 价格依次为 60 元/盒、65 元/盒、80 元/盒、90 元/盒。为增加销量, 李明对这四种水果进行促销: 一次购买水果的总价达到 120 元, 顾客就少付 x 元。每笔订单顾客网上支付成功后, 李明会得到支付款的 80%。

- ① 当 $x = 10$ 时, 顾客一次购买草莓和西瓜各 1 盒, 需要支付_____元;
 ② 在促销活动中, 为保证李明每笔订单得到的金额均不低于促销前总价的七折, 则 x 的最大值为_____。

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(15) (本小题 13 分)

在 $\triangle ABC$ 中， $a=3$ ， $b-c=2$ ， $\cos B=-\frac{1}{2}$ 。

(I) 求 b, c 的值；

(II) 求 $\sin(B-C)$ 的值。

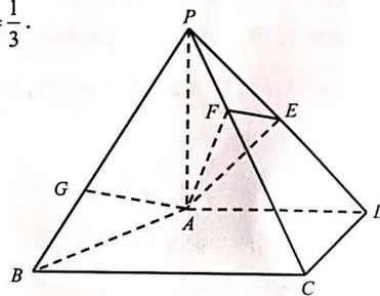
(16) (本小题 14 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AD \perp CD$ ， $AD \parallel BC$ ， $PA=AD=CD=2$ ， $BC=3$ 。E 为 PD 的中点，点 F 在 PC 上，且 $\frac{PF}{PC}=\frac{1}{3}$ 。

(I) 求证： $CD \perp$ 平面 PAD ；

(II) 求二面角 $F-AE-P$ 的余弦值；

(III) 设点 G 在 PB 上，且 $\frac{PG}{PB}=\frac{2}{3}$ 。判断直线 AG 是否在平面 AEF 内，说明理由。



(17) (本小题 13 分)

改革开放以来，人们的支付方式发生了巨大转变。近年来，移动支付已成为主要支付方式之一。为了解某校学生上个月 A, B 两种移动支付的使用情况，从全校学生中随机抽取了 100 人，发现样本中 A, B 两种支付方式都不使用的有 5 人，样本中仅使用 A 和仅使用 B 的学生的支付金额分布情况如下：

支付方式 \ 支付金额(元)	(0, 1 000]	(1 000, 2 000]	大于 2 000
仅使用 A	18 人	9 人	3 人
仅使用 B	10 人	14 人	1 人

(I) 从全校学生中随机抽取 1 人，估计该学生上个月 A, B 两种支付方式都使用的概率；

(II) 从样本仅使用 A 和仅使用 B 的学生中各随机抽取 1 人，以 X 表示这 2 人中上个月支付金额大于 1 000 元的人数，求 X 的分布列和数学期望；

(III) 已知上个月样本学生的支付方式在本月没有变化。现从样本仅使用 A 的学生中，随机抽查 3 人，发现他们本月的支付金额都大于 2 000 元。根据抽查结果，能否认为样本仅使用 A 的学生中本月支付金额大于 2 000 元的人数有变化？说明理由。

(18) (本小题 14 分)

已知抛物线 $C: x^2 = -2py$ 经过点 $(2, -1)$.

(I) 求抛物线 C 的方程及其准线方程;

(II) 设 O 为原点, 过抛物线 C 的焦点作斜率不为 0 的直线 l 交抛物线 C 于两点 M, N , 直线 $y = -1$ 分别交直线 OM, ON 于点 A 和点 B . 求证: 以 AB 为直径的圆经过 y 轴上的两个定点.

(19) (本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$.

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 的斜率为 1 的切线方程;

(II) 当 $x \in [-2, 4]$ 时, 求证: $x - 6 \leq f(x) \leq x$;

(III) 设 $F(x) = |f(x) - (x + a)|$ ($a \in \mathbf{R}$), 记 $F(x)$ 在区间 $[-2, 4]$ 上的最大值为 $M(a)$. 当 $M(a)$ 最小时, 求 a 的值.

(20) (本小题 13 分)

已知数列 $\{a_n\}$, 从中选取第 i_1 项、第 i_2 项、...、第 i_m 项 ($i_1 < i_2 < \dots < i_m$), 若 $a_{i_1} < a_{i_2} < \dots < a_{i_m}$, 则称新数列 $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}$ 为 $\{a_n\}$ 的长度为 m 的递增子列. 规定: 数列 $\{a_n\}$ 的任意一项都是 $\{a_n\}$ 的长度为 1 的递增子列.

(I) 写出数列 1, 8, 3, 7, 5, 6, 9 的一个长度为 4 的递增子列;

(II) 已知数列 $\{a_n\}$ 的长度为 p 的递增子列的末项的最小值为 a_{m_p} , 长度为 q 的递增子列的末项的最小值为 a_{n_q} . 若 $p < q$, 求证: $a_{m_p} < a_{n_q}$;

(III) 设无穷数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正整数, 且任意两项均不相等. 若 $\{a_n\}$ 的长度为 s 的递增子列末项的最小值为 $2s - 1$, 且长度为 s 末项为 $2s - 1$ 的递增子列恰有 2^{s-1} 个 ($s = 1, 2, \dots$), 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效)

2019 年普通高等学校招生全国统一考试

数学（理）（北京卷）参考答案

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

- (1) D (2) B (3) D (4) B
 (5) C (6) A (7) C (8) C

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

- (9) $\frac{\pi}{2}$ (10) 0 -10
 (11) 40 (12) 若 $l \perp m$, $l \perp \alpha$, 则 $m \parallel \alpha$. (答案不唯一)
 (13) -1 $(-\infty, 0]$ (14) 130 15

三、解答题（共 6 小题，共 80 分）

(15) (共 13 分)

解：(I) 由余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, 得

$$b^2 = 3^2 + c^2 - 2 \times 3 \times c \times \left(-\frac{1}{2}\right).$$

因为 $b = c + 2$,

$$\text{所以 } (c+2)^2 = 3^2 + c^2 - 2 \times 3 \times c \times \left(-\frac{1}{2}\right).$$

解得 $c = 5$.所以 $b = 7$.

$$\text{(II) 由 } \cos B = -\frac{1}{2} \text{ 得 } \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{由正弦定理得 } \sin C = \frac{c}{b} \sin B = \frac{5\sqrt{3}}{14}.$$

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B$ 是钝角,所以 $\angle C$ 为锐角.

$$\text{所以 } \cos C = \sqrt{1 - \sin^2 C} = \frac{11}{14}.$$

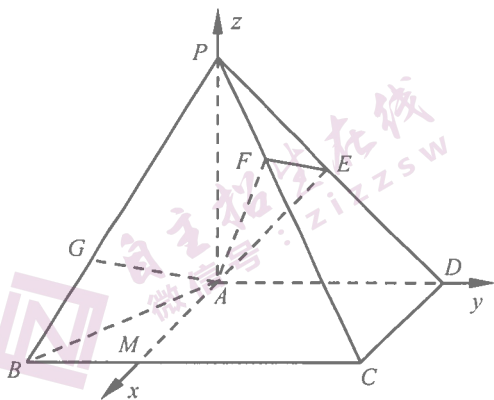
$$\text{所以 } \sin(B - C) = \sin B \cos C - \cos B \sin C$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

(16) (共 14 分)

解: (I) 因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$,
所以 $PA \perp CD$.
又因为 $AD \perp CD$,
所以 $CD \perp$ 平面 PAD .

(II) 过 A 作 AD 的垂线交 BC 于点 M .
因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$,
所以 $PA \perp AM$, $PA \perp AD$.
如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$,



则 $A(0,0,0)$, $B(2,-1,0)$, $C(2,2,0)$, $D(0,2,0)$, $P(0,0,2)$.

因为 E 为 PD 的中点, 所以 $E(0,1,1)$.

所以 $\overline{AE} = (0,1,1)$, $\overline{PC} = (2,2,-2)$, $\overline{AP} = (0,0,2)$.

所以 $\overline{PF} = \frac{1}{3}\overline{PC} = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$, $\overline{AF} = \overline{AP} + \overline{PF} = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})$.

设平面 AEF 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overline{AE} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overline{AF} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} y + z = 0, \\ \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{4}{3}z = 0. \end{cases}$$

令 $z = 1$, 则 $y = -1$, $x = -1$.

于是 $\mathbf{n} = (-1, -1, 1)$.

又因为平面 PAD 的法向量为 $\mathbf{p} = (1, 0, 0)$,

$$\text{所以 } \cos \langle \mathbf{n}, \mathbf{p} \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{n}| |\mathbf{p}|} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

由题知, 二面角 $F-AE-P$ 为锐角, 所以其余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(III) 直线 AG 在平面 AEF 内.

因为点 G 在 PB 上, 且 $\frac{PG}{PB} = \frac{2}{3}$, $\overline{PB} = (2, -1, -2)$,

所以 $\overline{PG} = \frac{2}{3}\overline{PB} = (\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$, $\overline{AG} = \overline{AP} + \overline{PG} = (\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

由 (II) 知, 平面 AEF 的法向量 $\mathbf{n} = (-1, -1, 1)$.

所以 $\overline{AG} \cdot \mathbf{n} = -\frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$.

所以直线 AG 在平面 AEF 内.

(17) (共 13 分)

解: (I) 由题意知, 样本中仅使用 A 的学生有 $18+9+3=30$ 人, 仅使用 B 的学生有 $10+14+1=25$ 人, A, B 两种支付方式都不使用的学生有 5 人.

故样本中 A, B 两种支付方式都使用的学生有 $100-30-25-5=40$ 人.

所以从全校学生中随机抽取 1 人, 该学生上个月 A, B 两种支付方式都使用的概

率估计为 $\frac{40}{100}=0.4$.

(II) X 的所有可能值为 0, 1, 2.

记事件 C 为“从样本仅使用 A 的学生中随机抽取 1 人, 该学生上个月的支付金额大于 1000 元”, 事件 D 为“从样本仅使用 B 的学生中随机抽取 1 人, 该学生上个月的支付金额大于 1000 元”.

由题设知, 事件 C, D 相互独立, 且 $P(C)=\frac{9+3}{30}=0.4$, $P(D)=\frac{14+1}{25}=0.6$.

所以 $P(X=2)=P(CD)=P(C)P(D)=0.24$,

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(C\bar{D} \cup \bar{C}D) \\ &= P(C)P(\bar{D}) + P(\bar{C})P(D) \\ &= 0.4 \times (1-0.6) + (1-0.4) \times 0.6 \\ &= 0.52, \end{aligned}$$

$$P(X=0) = P(\bar{C}\bar{D}) = P(\bar{C})P(\bar{D}) = 0.24.$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	0.24	0.52	0.24

故 X 的数学期望 $E(X) = 0 \times 0.24 + 1 \times 0.52 + 2 \times 0.24 = 1$.

(III) 记事件 E 为“从样本仅使用 A 的学生中随机抽查 3 人, 他们本月的支付金额都大于 2000 元”.

假设样本仅使用 A 的学生中, 本月支付金额大于 2000 元的人数没有变化, 则

由上个月的样本数据得 $P(E) = \frac{1}{C_{30}^3} = \frac{1}{4060}$.

答案示例 1: 可以认为有变化. 理由如下:

$P(E)$ 比较小, 概率比较小的事件一般不容易发生. 一旦发生, 就有理由认为本月的支付金额大于 2000 元的人数发生了变化. 所以可以认为有变化.

答案示例 2: 无法确定有没有变化. 理由如下:

事件 E 是随机事件, $P(E)$ 比较小, 一般不容易发生, 但还是有可能发生的, 所以无法确定有没有变化.

(18) (共 14 分)

解: (I) 由抛物线 $C: x^2 = -2py$ 经过点 $(2, -1)$, 得 $p = 2$.

所以抛物线 C 的方程为 $x^2 = -4y$, 其准线方程为 $y = 1$.

(II) 抛物线 C 的焦点为 $F(0, -1)$.

设直线 l 的方程为 $y = kx - 1$ ($k \neq 0$).

$$\text{由} \begin{cases} y = kx - 1, \\ x^2 = -4y \end{cases} \text{得 } x^2 + 4kx - 4 = 0.$$

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 $x_1 x_2 = -4$.

直线 OM 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1} x$.

令 $y = -1$, 得点 A 的横坐标 $x_A = -\frac{x_1}{y_1}$.

同理得点 B 的横坐标 $x_B = -\frac{x_2}{y_2}$.

设点 $D(0, n)$, 则 $\overline{DA} = (-\frac{x_1}{y_1}, -1 - n)$, $\overline{DB} = (-\frac{x_2}{y_2}, -1 - n)$,

$$\begin{aligned} \overline{DA} \cdot \overline{DB} &= \frac{x_1 x_2}{y_1 y_2} + (n + 1)^2 \\ &= \frac{x_1 x_2}{(-\frac{x_1^2}{4})(-\frac{x_2^2}{4})} + (n + 1)^2 \\ &= \frac{16}{x_1 x_2} + (n + 1)^2 \\ &= -4 + (n + 1)^2. \end{aligned}$$

令 $\overline{DA} \cdot \overline{DB} = 0$, 即 $-4 + (n + 1)^2 = 0$, 得 $n = 1$ 或 $n = -3$.

综上, 以 AB 为直径的圆经过 y 轴上的定点 $(0, 1)$ 和 $(0, -3)$.

(19) (共 13 分)

解: (I) 由 $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$ 得 $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 1$.

令 $f'(x) = 1$, 即 $\frac{3}{4}x^2 - 2x + 1 = 1$, 得 $x = 0$ 或 $x = \frac{8}{3}$.

又 $f(0) = 0$, $f(\frac{8}{3}) = \frac{8}{27}$,

所以曲线 $y = f(x)$ 的斜率为 1 的切线方程是 $y = x$ 与 $y - \frac{8}{27} = x - \frac{8}{3}$,

即 $y = x$ 与 $y = x - \frac{64}{27}$.

(II) 令 $g(x) = f(x) - x, x \in [-2, 4]$.

$$\text{由 } g(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 \text{ 得 } g'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x.$$

$$\text{令 } g'(x) = 0 \text{ 得 } x = 0 \text{ 或 } x = \frac{8}{3}.$$

$g'(x), g(x)$ 的情况如下:

x	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, \frac{8}{3})$	$\frac{8}{3}$	$(\frac{8}{3}, 4)$	4
$g'(x)$		+		-		+	
$g(x)$	-6	↗	0	↘	$-\frac{64}{27}$	↗	0

所以 $g(x)$ 的最小值为 -6, 最大值为 0.

故 $-6 \leq g(x) \leq 0$, 即 $x - 6 \leq f(x) \leq x$.

(III) 由 (II) 知,

$$\text{当 } a < -3 \text{ 时, } M(a) \geq F(0) = |g(0) - a| = -a > 3;$$

$$\text{当 } a > -3 \text{ 时, } M(a) \geq F(-2) = |g(-2) - a| = 6 + a > 3;$$

$$\text{当 } a = -3 \text{ 时, } M(a) = 3.$$

综上, 当 $M(a)$ 最小时, $a = -3$.

(20) (共 13 分)

解: (I) 1, 3, 5, 6. (答案不唯一)

(II) 设长度为 q 末项为 a_{n_0} 的一个递增子列为 $a_{r_1}, a_{r_2}, \dots, a_{r_{q-1}}, a_{n_0}$.

$$\text{由 } p < q, \text{ 得 } a_p \leq a_{r_{q-1}} < a_{n_0}$$

因为 $\{a_n\}$ 的长度为 p 的递增子列末项的最小值为 a_{m_0} ,

又 $a_{r_1}, a_{r_2}, \dots, a_{r_p}$ 是 $\{a_n\}$ 的长度为 p 的递增子列,

$$\text{所以 } a_{m_0} \leq a_{r_p}.$$

$$\text{所以 } a_{m_0} < a_{n_0}.$$

(III) 由题设知, 所有正奇数都是 $\{a_n\}$ 中的项.

先证明: 若 $2m$ 是 $\{a_n\}$ 中的项, 则 $2m$ 必排在 $2m-1$ 之前 (m 为正整数).

假设 $2m$ 排在 $2m-1$ 之后.

设 $a_{p_1}, a_{p_2}, \dots, a_{p_{m-1}}, 2m-1$ 是数列 $\{a_n\}$ 的长度为 m 末项为 $2m-1$ 的递增子列, 则

$a_{p_1}, a_{p_2}, \dots, a_{p_{m-1}}, 2m-1, 2m$ 是数列 $\{a_n\}$ 的长度为 $m+1$ 末项为 $2m$ 的递增子列. 与已知矛盾.

再证明: 所有正偶数都是 $\{a_n\}$ 中的项.

假设存在正偶数不是 $\{a_n\}$ 中的项, 设不在 $\{a_n\}$ 中的最小的正偶数为 $2m$.

因为 $2k$ 排在 $2k-1$ 之前 ($k=1, 2, \dots, m-1$), 所以 $2k$ 和 $2k-1$ 不可能在 $\{a_n\}$ 的同一个递增子列中.

又 $\{a_n\}$ 中不超过 $2m+1$ 的数为 $1, 2, \dots, 2m-2, 2m-1, 2m+1$, 所以 $\{a_n\}$ 的长度为 $m+1$ 且末项为 $2m+1$ 的递增子列个数至多为 $\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}_{(m-1)\text{个}} \times 1 \times 1 = 2^{m-1} < 2^m$.

与已知矛盾.

最后证明: $2m$ 排在 $2m-3$ 之后 ($m \geq 2$ 为整数).

假设存在 $2m$ ($m \geq 2$), 使得 $2m$ 排在 $2m-3$ 之前, 则 $\{a_n\}$ 的长度为 $m+1$ 且末项为 $2m+1$ 的递增子列的个数小于 2^m . 与已知矛盾.

综上, 数列 $\{a_n\}$ 只可能为 $2, 1, 4, 3, \dots, 2m-3, 2m, 2m-1, \dots$.

经验证, 数列 $2, 1, 4, 3, \dots, 2m-3, 2m, 2m-1, \dots$ 符合条件.

所以 $a_n = \begin{cases} n+1, & n \text{ 为奇数,} \\ n-1, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$