大联考雅礼中学 2024 届高三月考试卷（二）

数学答案

1.【答案】C

2. 【答案】C

3. 【答案】A

4. 【答案】A

5. 【答案】C

6. 【答案】A

7.【答案】C

8. 【答案】D

9.【答案】ABD

10. 【答案】AB

11.【答案】BD

12. 【答案】ACD

13. 【答案】-2

【详解】解：因为 $f(x)=x-a\ln x$，所以 $f'(x)=1-\dfrac{a}{x}$，

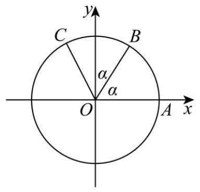
又函数 $f(x)=x-a\ln x$ 的图象在 $x=1$ 处的切线斜率为 3，

则 $f'(1)=1-\dfrac{a}{1}=3$，所以 $a=-2$.

故答案为：-2

14. 【答案】$\left(-\dfrac{7}{25},\dfrac{24}{25}\right)$

【详解】由题意可知圆 O 的半径为 $\sqrt{\left(\dfrac{3}{5}\right)^2+\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=1$，设 $\angle AOB=\angle BOC=\alpha$，由题意可知 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，则点 C 的横坐标为 $1\times\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=-\dfrac{7}{25}$，点 C 的纵坐标为 $1\times\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{24}{25}$. 故答案为：$\left(-\dfrac{7}{25},\dfrac{24}{25}\right)$.



15.【答案】$2\sqrt{2}$

【分析】由题意可得 $f(x)=\mathrm{e}^{x}+2\mathrm{e}^{-x}$，再结合基本不等式即可得答案.

【详解】解：因为函数 $y=f(x)+\mathrm{e}^{x}$ 为偶函数，则 $f(-x)+\mathrm{e}^{-x}=f(x)+\mathrm{e}^{x}$，

即 $f(x)-f(-x)=\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x}$，①

又因为函数 $y=f(x)-3\mathrm{e}^{x}$ 为奇函数，则 $f(-x)-3\mathrm{e}^{-x}=-f(x)+3\mathrm{e}^{x}$，

即 $f(x)+f(-x)=3\mathrm{e}^{x}+3\mathrm{e}^{-x}$，②

联立①②可得 $f(x)=\mathrm{e}^{x}+2\mathrm{e}^{-x}$，

由基本不等式可得 $f(x)=\mathrm{e}^{x}+2\mathrm{e}^{-x}\geq 2\sqrt{\mathrm{e}^{x}\cdot 2\mathrm{e}^{-x}}=2\sqrt{2}$，

当且仅当 $\mathrm{e}^{x}=2\mathrm{e}^{-x}$ 时，即当 $x=\frac{1}{2}\ln 2$ 时，等号成立，

故函数 $f(x)$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

故答案为：$2\sqrt{2}$

16. 【答案】28π

【详解】将 $\triangle ABD$ 沿 BD 折起后，取 BD 中点为 E，连接 AE，CE，则 $AE\perp BD$，$CE\perp BD$，

所以 $\angle AEC$ 即为二面角 $A-BD-C$ 的平面角，所以 $\angle AEC=120°$；

设 $AE=a$，则 $AE=CE=a$,在 $\triangle AEC$ 中

$AC^{2}=AE^{2}+EC^{2}-2AE\cdot CE\cdot\cos 120°$，即 $27=2a^{2}-2\times a\times a\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

解得 $a=3$，即 $AE=3$，所以 $AB=\sqrt{3^{2}+3}=2\sqrt{3}$

所以 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BCD$ 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的等边三角形.

分别记三角形 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BCD$ 的重心为 G、F，则 $EG=\frac{1}{3}AE=1$，$EF=\frac{1}{3}CE=1$；即 $EF=EG$；

因为 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BCD$ 都是边长为 $2\sqrt{3}$ 的等边三角形，

所以点 G 是 $\triangle ABD$ 的外心，点 F 是 $\triangle BCD$ 的外心；

记该几何体$ABCD$的外接球球心为O，连接OF，OG，

根据球的性质，可得$OF\perp$平面BCD，$OG\perp$平面ABD，

所以$\triangle OGE$与$\triangle OFE$都是直角三角形，且OE为公共边，

所以$Rt\triangle OGE$与$Rt\triangle OFE$全等，因此$\angle OEG=\angle OEF=\frac{1}{2}\angle AEC=60^\circ$，

所以$OE=\frac{EF}{\cos 60^\circ}=2$；

因为$AE\perp BD$，$CE\perp BD$，$AE\cap CE=E$，且$AE\subset$平面AEC，$CE\subset$平面AEC，

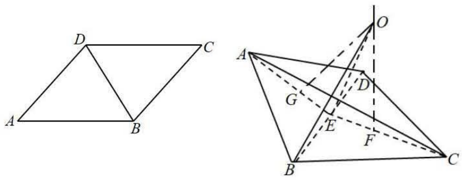
所以$BD\perp$平面AEC；

又$OE\subset$平面AEC，所以$BD\perp OE$，

连接OB，则外接球半径为$OB=\sqrt{OE^2+BE^2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+2^2}=\sqrt{7}$，

所以外接球表面积为$S=4\pi\times\left(\sqrt{7}\right)^2=28\pi$.

故答案为：28π



17. 【答案】(1) $a_n=n$；

(2) 证明见解析.

【解析】【小问 1 详解】

依题意可得，当$n=1$时，$2S_1=2a_1=a_1^2+a_1$，$a_n>0$，则$a_1=1$；

当$n\geq 2$时，$2S_n=a_n^2+a_n$，$2S_{n-1}=a_{n-1}^2+a_{n-1}$，两式相减，

整理可得$\left(a_n+a_{n-1}\right)\left(a_n-a_{n-1}-1\right)=0$，又$\{a_n\}$为正项数列，

故可得$a_n-a_{n-1}=1$，所以数列$\{a_n\}$是以$a_1=1$为首项，$d=1$为公差的等差数列，

所以$a_n=n$.

【小问 2 详解】

证明：由 (1) 可知$a_n=n$，所以$b_n=\frac{4}{n\left(n+2\right)}=\frac{2}{n}-\frac{2}{n+2}$，

$T_n=\frac{4}{1\times3}+\frac{4}{2\times4}+\frac{4}{3\times5}+\cdots+\frac{4}{n(n+2)}$

$=\frac{2}{1}-\frac{2}{3}+\frac{2}{2}-\frac{2}{4}+\frac{2}{3}-\frac{2}{5}+\frac{2}{4}-\frac{2}{6}\cdots+\frac{2}{n-2}-\frac{2}{n}+\frac{2}{n-1}-\frac{2}{n+1}+\frac{2}{n}-\frac{2}{n+2}$

$=2+1-\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n+2}<3$，所以$T_n<3$成立.

18. 【答案】（1）$\frac{2\pi}{3}$

（2）18

【小问 1 详解】

解：因为$\sqrt{3}b=a\left(\sqrt{3}\cos C-\sin C\right)$，

由正弦定理可得$\sqrt{3}\sin B=\sin A\left(\sqrt{3}\cos C-\sin C\right)$，①

因为$A+B+C=\pi$，所以$\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，

代入①式整理得$\sqrt{3}\cos A\sin C=-\sin A\sin C$，

又因为A、$C\in(0,\pi)$，$\sin C\neq0$，则$\sqrt{3}\cos A=-\sin A<0$，所以$\tan A=-\sqrt{3}$，

又因为$A\in(0,\pi)$，解得$A=\frac{2\pi}{3}$.

【小问 2 详解】

解：由（1）知，$A=\frac{2\pi}{3}$，因为$\triangle ABC$内切圆半径为$\sqrt{3}$，

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A$，即$(b+c+8)\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}bc$，

所以，$b+c+8=\frac{1}{2}bc$②，

由余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\frac{2\pi}{3}$得$b^2+c^2+bc=64$，所以$(b+c)^2-bc=64$③，

联立②③，得$(b+c)^2-2(b+c+8)=64$，解得$b+c=10$，

所以$\triangle ABC$的周长为$a+b+c=18$.

19. 【答案】（1）证明见解析

（2）$\frac{4\sqrt{3}}{7}$

【解析】【小问 1 详解】

证明：因为$AO\perp$平面BB_1C_1C，$B_1C\subset$平面BB_1C_1C，所以$AO\perp B_1C$，

因为 $BC=BB_1$，四边形 BB_1C_1C 是平行四边形，

所以四边形 BB_1C_1C 是菱形，所以 $BC_1\perp B_1C$．

又因为 $AO\cap BC_1=O$，$AO\subset$ 平面 ABC_1，$BC_1\subset$ 平面 ABC_1，

所以 $B_1C\perp$ 平面 ABC_1，

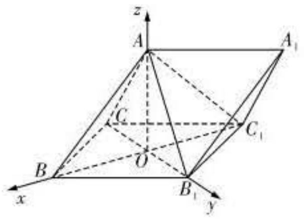
因为 $AB\subset$ 平面 ABC_1，

所以 $AB\perp B_1C$．

【小问 2 详解】

解：以 O 为原点，分别以 OB，OB_1，OA 所在直线为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，

如图所示，则 $B\left(\sqrt{3},0,0\right)$，$B_1\left(0,1,0\right)$，$A\left(0,0,1\right)$，$C_1\left(-\sqrt{3},0,0\right)$，



所以 $\overrightarrow{AB_1}=\left(0,1,-1\right)$，$\overrightarrow{C_1B_1}=\left(\sqrt{3},1,0\right)$，$\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}=\left(\sqrt{3},0,-1\right)$，

设平面 AB_1C_1 的一个法向量为 $\overrightarrow{n_1}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AB_1}=y_1-z_1=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{C_1B_1}=\sqrt{3}x_1+y_1=0\end{cases}$，取 $x_1=1$，可得 $y_1=-\sqrt{3}$，$z_1=-\sqrt{3}$，

所以 $\overrightarrow{n_1}=\left(1,-\sqrt{3},-\sqrt{3}\right)$，

设平面 $B_1C_1A_1$ 的一个法向量为 $\overrightarrow{n_2}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=\sqrt{3}x_2-z_2=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{C_1B_1}=\sqrt{3}x_2+y_2=0\end{cases}$，取 $x_2=1$，可得 $y_2=-\sqrt{3}$，$z_2=\sqrt{3}$，

所以 $\overrightarrow{n_2}=\left(1,-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$，

设二面角 $A_1-B_1C_1-A$ 的大小为 θ，

因为 $\cos\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{\left(1,-\sqrt{3},-\sqrt{3}\right)\cdot\left(1,-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\dfrac{1}{7}$，

所以$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，

所以二面角$A_1-B_1C_1-A$的正弦值为$\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

20. 【答案】(1) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$；(2) $3\sqrt{2}$.

【详解】(1) Q $A(0,\sqrt{2})$为椭圆C上一点，$\therefore b=\sqrt{2}$

又 $\because |AF|=2|FB|$，$|AB|=\frac{3\sqrt{3}}{2}$可得，$|AF|=\sqrt{3}$，即$a=\sqrt{3}$

所以椭圆C的标准方程是$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2) 由 (1) 知$F(1,0)$，$A(0,\sqrt{2})$，$\therefore$直线AF的方程为$\sqrt{2}x+y-\sqrt{2}=0$，

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1\\ \sqrt{2}x+y-\sqrt{2}=0\end{cases}$，整理得：$4x^2-6x=2(x^2-3x)=0$，

解得：$x_1=0,x_2=\frac{3}{2}$，$\therefore B(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$

设点$A(0,\sqrt{2})$，$B(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$到直线$y=kx\ (k>0)$的距离为$d_1$和$d_2$，

则$d_1=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k^2+1}}$，$d_2=\frac{3k+\sqrt{2}}{2\sqrt{k^2+1}}$，

$\because$直线$y=kx\ (k>0)$与椭圆相交于C,D两点，

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1\\ y=kx\end{cases}$，整理得：$(3k^2+2)x^2=6$，解得：$x_3=-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3k^2+2}},x_4=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3k^2+2}}$.

$\therefore |CD|=\sqrt{k^2+1}|x_3-x_4|=\frac{2\sqrt{6}\sqrt{k^2+1}}{\sqrt{3k^2+2}}$.

$\therefore$设四边形$ACBD$面积为S，则$S=\frac{1}{2}|CD|(d_1+d_2)=\frac{\sqrt{6}\sqrt{k^2+1}}{\sqrt{3k^2+2}}\cdot\frac{3(k+\sqrt{2})}{2\sqrt{k^2+1}}=\frac{3\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{k+\sqrt{2}}{\sqrt{3k^2+2}}\ (k>0)$.

设$t=k+\sqrt{2}\in(\sqrt{2},+\infty)$，则$k=t-\sqrt{2}$，

$$\therefore S=\frac{3\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{t}{\sqrt{3(t-\sqrt{2})^{2}+2}}=\frac{3\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{t}{\sqrt{3t^{2}-6\sqrt{2}t+8}}=\frac{3\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3-6\sqrt{2}\cdot\frac{1}{t}+8\cdot\frac{1}{t^{2}}}}$$

$$=\frac{3\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{8\left(\frac{1}{t}-\frac{3\sqrt{2}}{8}\right)^{2}+\frac{3}{4}}}\leq 3\sqrt{2}$$

当$\frac{1}{t}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$，即$t=\frac{8}{3\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}=k+\sqrt{2}$，即$k=\frac{\sqrt{2}}{3}$时，四边形$ACBD$面积有最大值$3\sqrt{2}$.

21.【答案】(1) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

(2) $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{12},\frac{\sqrt{3}}{12}\right]$

【解析】

【分析】(1) 取OB的中点N，连接MN，证明出$NP//OC$，可得出$\angle ONP=\frac{\pi}{3}$，$\angle OPN=\theta$，然后在$\triangle ONP$中利用正弦定理可求得$\sin\theta$的值；

(2) 计算得出四边形$OCPB$的面积$S=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)>\frac{3}{4}$，结合$\theta\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$可求得$\theta$的取值范围，设三棱锥$A-MPC$的体积为$V_2$，三棱锥$A-BPC$的体积为$V_3$，计算得出

$V_2=\frac{1}{2}V_3=\frac{1}{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$，结合正弦型函数的基本性质可求得结果.

【小问1详解】

解：取OB的中点N，连接MN，$\because M$为AB的中点，则$MN//OA$，

$\because MN\not\subset$平面AOC，$AO\subset$平面AOC，则$MN//$平面AOC，

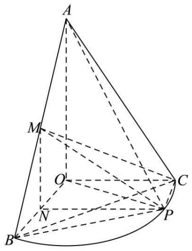
由题设，当$MP//$平面AOC时，因为$MP\cap MN=M$，所以，平面$MNP//$平面AOC，

$\because NP\subset$平面MNP，则$NP//$平面AOC，

因为$NP\subset$平面$OBPC$，平面$OBPC\cap$平面$AOC=OC$，则$NP//OC$，

所以，$\angle ONP=\pi-\angle BOC=\frac{\pi}{3}$，$\angle OPN=\angle COP=\theta$，

在$\triangle OPN$中，由正弦定理可得$\frac{ON}{\sin\theta}=\frac{OP}{\sin\frac{\pi}{3}}$，故$\sin\theta=\frac{ON\sin\frac{\pi}{3}}{OP}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.



【小问 2 详解】

解：四棱锥 $M-OCPB$ 的体积 $V_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}OA\cdot S=\frac{1}{3}S$，其中 S 表示四边形 $OCPB$ 的面积，

则 $S=\frac{1}{2}OP\cdot OC\sin\theta+\frac{1}{2}OP\cdot OB\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)=\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)$

$=\frac{3}{4}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{4}\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$，

所以，$V_1=\frac{1}{3}S=\frac{\sqrt{3}}{6}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)>\frac{1}{4}$，可得 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)>\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\because 0<\theta<\frac{2\pi}{3}$，则 $\frac{\pi}{6}<\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，故 $\frac{\pi}{3}<\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$，解得 $\theta\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$.

设三棱锥 $A-MPC$ 的体积为 V_2，三棱锥 $A-BPC$ 的体积为 V_3，

由于 M 是 AB 的中点，则 $V_2=\frac{1}{2}V_3=\frac{1}{6}OA\cdot\left(S-\frac{1}{2}OB\cdot OC\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$=\frac{1}{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}\right]\in\left(\frac{3-\sqrt{3}}{12},\frac{\sqrt{3}}{12}\right]$.

22. 【答案】（1）证明见解析

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）由均值的性质及基本不等式即可证明.

（2）由二项分布的概率及条件概率化简即可证明.

【小问 1 详解】

由题意可得 X 满足二项分布 $X\sim B(N,p)$，

由 $E(aX+b)=aE(X)+b$ 知，$E[f(X)]=\frac{N}{K}+K\cdot E(X)=\frac{N}{K}+K\cdot pN\geq 2\sqrt{p}\cdot N$，当且仅当 $\frac{1}{K}=Kp$ 时取等号；

【小问 2 详解】

记 $\overline{P}=P$（混管中恰有 1 例阳性|混管检测结果为阳性），

$P_i=P$（混管中恰有 i 例阳性）$=C_K^i p^i(1-p)^{K-i}$，$i=0,1,\cdots,K$，

令 $h(x)=e^x-x-1$，$-2\times10^{-3}<x<2\times10^{-3}$，

则 $h'(x)=e^x-1$，

当 $x\in(-2\times10^{-3},0)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 为单调递减，

当 $x\in(0,2\times10^{-3})$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 为单调递增，所以 $h(x)\ge h(0)=0$，

且 $h(-2\times10^{-3})=e^{-2\times10^{-3}}-(-2\times10^{-3})-1\approx0$，$h(2\times10^{-3})=e^{2\times10^{-3}}-(2\times10^{-3})-1\approx0$，

所以当 $-2\times10^{-3}<x<2\times10^{-3}$，$e^x-x-1\approx0$ 即 $e^x\approx x+1$，两边取自然对数可得 $x\approx\ln(x+1)$，

所以当 $0<p<10^{-4}$，$10\le K\le20$ 时，

所以 $(1-p)^K=e^{K\ln(1-p)}\approx e^{-Kp}\approx1-Kp$，

则 $\overline{P}=\dfrac{P_1}{1-P_0}=\dfrac{Kp(1-p)^{K-1}}{1-(1-p)^K}\approx\dfrac{Kp[1-(K-1)p]}{Kp}=1-(K-1)p\approx1$.

故某混管检测结果为阳性，则参与该混管检测的人中大概率恰有一人为阳性.

关于我们

全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。