

2022~2023 学年度第一学期期末学业水平诊断

高三数学

注意事项:

1. 本试题满分 150 分, 考试时间为 120 分钟.
 2. 答卷前, 务必将姓名和准考证号填涂在答题纸上.
 3. 使用答题纸时, 必须使用 0.5 毫米的黑色签字笔书写, 要字迹工整, 笔迹清晰; 超出答题区书写的答案无效; 在草稿纸、试题卷上答题无效.
- 一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求.

1. 若集合 $A = \{x | y = \sqrt{x}\}$, $B = \{x | x^2 - x - 2 < 0\}$, 则 $A \cap B =$
 A. $\{x | 0 < x < 1\}$ B. $\{x | 0 \leq x < 1\}$ C. $\{x | 0 < x < 2\}$ D. $\{x | 0 \leq x < 2\}$

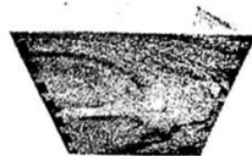
2. 已知 $a, b \in \mathbb{R}$, 则 “ $a > b$ ” 的一个充分不必要条件为

- A. $a^2 > b^2$ B. $\ln a > \ln b$ C. $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$ D. $2^a > 2^b$

3. 过点 $(0, 3)$ 且与曲线 $y = x^3 - 2x + 1$ 相切的直线方程为

- A. $x - y - 3 = 0$ B. $x - y + 3 = 0$ C. $x + y + 3 = 0$ D. $x + y - 3 = 0$

4. 米斗是古代官仓、米行等用来称量粮食的器具, 鉴于其储物功能以及吉祥富足的寓意, 现今多在超市、粮店等广泛使用. 右图为一个正四棱台形米斗 (忽略其厚度), 其上、下底面正方形边长分别为 30 cm、20 cm, 侧棱长为 $5\sqrt{11}$ cm, 若将该米斗盛满大米 (沿着上底面刮平后不溢出), 设每立方分米的大米重 0.8 千克, 则该米斗盛装大米约



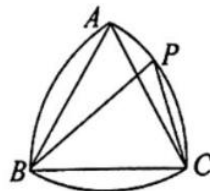
- A. 6.6 千克 B. 6.8 千克 C. 7.6 千克 D. 7.8 千克

5. 设 A, B 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点和上顶点, F 为 C 的右焦点,

若 F 到直线 AB 的距离为 b , 则该椭圆的离心率为

- A. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ B. $\sqrt{3}-1$ C. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ D. $\sqrt{2}-1$

6. 勒洛三角形是一种典型的定宽曲线, 以等边三角形每个顶点为圆心, 以边长为半径, 在另两个顶点间作一段圆弧, 三段圆弧围成的曲边三角形就是勒洛三角形. 在如图所示的勒洛三角形中, 已知 $AB = 2$, P 为弧 AC 上的点且 $\angle PBC = 45^\circ$, 则 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CP}$ 的值为



- A. $4 - \sqrt{2}$ B. $4 + \sqrt{2}$ C. $4 - 2\sqrt{2}$ D. $4 + 2\sqrt{2}$

高三数学试题 (第 1 页, 共 4 页)

7. 过直线 $2x - y + 1 = 0$ 上一点 P 作圆 $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ 的两条切线 PA, PB , 若 $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = 0$, 则点 P 的横坐标为

- A. 0 B. $\frac{3}{5}$ C. $\pm \frac{3}{5}$ D. $\pm \frac{\sqrt{15}}{5}$

8. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足: $f(x - \frac{\pi}{2})$ 为偶函数, 且

$$f(x) = \begin{cases} -8\sin x, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2}f(x - \pi), & x > 0 \end{cases}; \text{ 函数 } g(x) = \lg|x + \frac{\pi}{2}|, \text{ 则当 } x \in [-4\pi, 3\pi] \text{ 时, 函数}$$

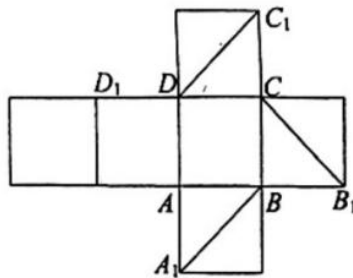
$y = f(x) - g(x)$ 的所有零点之和为

- A. -7π B. -6π C. $-\frac{7\pi}{2}$ D. -3π

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 如图是某正方体的平面展开图, 则在该正方体中

- A. $A_1B \parallel C_1D$
B. $A_1B \parallel$ 平面 ACD_1
C. A_1B 与 CB_1 所成角为 60°
D. A_1B 与平面 AB_1C 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$



10. 已知函数 $f(x) = \sin x - a \cos x (a \in \mathbf{R})$ 的图象关于直线 $x = -\frac{\pi}{6}$ 对称, 则

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 2π
B. $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ 上单调递增
C. $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{3}, 0)$ 对称
D. 若 $f(x_1) + f(x_2) = 0$, 且 $f'(x)$ 在 (x_1, x_2) 上无零点, 则 $|x_1 + x_2|$ 的最小值为 $\frac{2\pi}{3}$

11. 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $a + 2b = 1$, 则

- A. $ab \leq \frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{a} + \frac{1}{2b+1} \geq 4$ C. $\sin a^2 + 2b < 1$ D. $\ln a - e^{-2b} < -1$

高三数学试题 (第 2 页, 共 4 页)

12. 已知过抛物线 $C: y^2 = 4x$ 焦点 F 的直线 l 交 C 于 A, B 两点, 交 C 的准线于点 M , 其中 B 点在线段 AM 上, O 为坐标原点, 设直线 l 的斜率为 k , 则
- A. 当 $k=1$ 时, $|AB|=8$ B. 当 $k=2\sqrt{2}$ 时, $|BM|=|AB|$
 C. 存在 k 使得 $\angle AOB=90^\circ$ D. 存在 k 使得 $\angle AOB=120^\circ$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知 $2^x = 3^y = 6$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的值为

14. 已知向量 $a = (\sin \theta, \cos \theta)$, $b = (3, 1)$, 若 $a \parallel b$, 则 $\sin^2 \theta + \sin 2\theta$ 的值为

15. “0,1 数列”是每一项均为 0 或 1 的数列, 在通信技术中应用广泛. 设 A 是一个“0,1 数列”, 定义数列 $f(A)$: 数列 A 中每个 0 都变为“1,0,1”, A 中每个 1 都变为“0,1,0”, 所得到的新数列. 例如数列 $A: 1, 0$, 则数列 $f(A): 0, 1, 0, 1, 0, 1$. 已知数列 $A_1: 1, 0, 1, 0, 1$, 记数列 $A_{k+1} = f(A_k)$, $k=1, 2, 3, \dots$, 则数列 A_k 的所有项之和为

16. 在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, 侧棱 $AA_1 = 2$, M 为侧棱 BB_1 的中点, N 在侧面矩形 ADD_1A_1 内 (异于点 D_1), 则三棱锥 $N-MCD_1$ 体积的最大值为

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $a \cos C + c \sin A = b$.

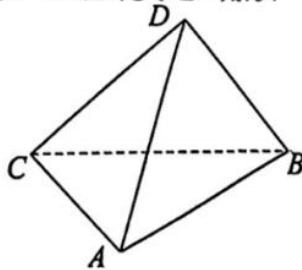
- (1) 求 A ;
 (2) 若 $\overline{AD} = 2\overline{DC}$, $BD = 3$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

18. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的各项均不为零, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $b_1 = 2a_1 = 2$, $a_n a_{n+1} = 2S_n$, $b_m \cdot b_n = b_{m+n}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;
 (2) 设 $c_n = a_n b_n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12 分) 如图, $\triangle ABC$ 是以 BC 为斜边的等腰直角三角形, $\triangle BCD$ 是等边三角形, $BC = 2$, $AD = \sqrt{7}$.

- (1) 求证: $BC \perp AD$;
 (2) 求平面 ABD 与平面 BCD 夹角的余弦值.



高三数学试题 (第 3 页, 共 4 页)

20. (12分) 某工厂拟建造如图所示的容器(不计厚度, 长度单位: 米), 其中容器的上端为半球形, 下部为圆柱形, 该容器的体积为 $\frac{160\pi}{3}$ 立方米, 且 $l \geq 6r$. 假

设该容器的建造费用仅与其表面积有关. 已知圆柱形部分侧面的建造费用为每平方米 2.25 千元, 半球形部分以及圆柱底面每平方米建造费用为 m ($m > 2.25$) 千元. 设该容器的建造费用为 y 千元.



(1) 写出 y 关于 r 的函数表达式, 并求该函数的定义域;

(2) 求该容器的建造费用最小时的 r .

21. (12分) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的焦距为 $2\sqrt{5}$, A, B 为 C 的左、右

顶点, 点 P 为 C 上异于 A, B 的任意一点, 满足 $k_{AP} \cdot k_{BP} = \frac{1}{4}$.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 过 C 的右焦点 F 且斜率不为 0 的直线 l 交 C 于两点 M, N , 在 x 轴上是否存在一定点 D , 使得 $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DN}$ 为定值? 若存在, 求定点 D 的坐标和相应的定值; 若不存在, 说明理由.

22. (12分) 已知 $a > 0$, $f(x) = xe^x - a(x^2 + 2x)$, $x \in \mathbf{R}$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若存在 a 使得 $f'(x) \geq b - 2a$ 对任意 x 恒成立, 求实数 b 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线