湘豫名校联考
2022年12月高三上学期期末摸底考试
数学(文科)参考答案

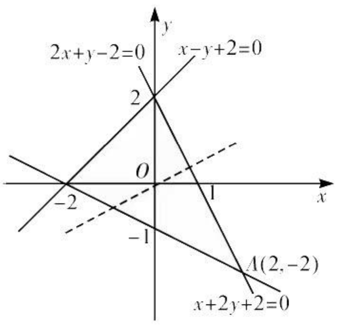
题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	A	A	D	A	A	B	D	C	A	D

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. B 【解析】因为集合 $A=\{x|(|x|-1)(x^2-4)=0\}=\{-2,-1,1,2\}$，所以 $B=\{y|y=2x,x\in A\}=\{-4,-2,2,4\}$. 所以 $A\cap B=\{-2,2\}$. 故选 B.

2. D 【解析】由 $\dfrac{a+2\mathrm{i}}{1+b\mathrm{i}}=1-\mathrm{i}$，得 $a+2\mathrm{i}=(1-\mathrm{i})(1+b\mathrm{i})$，即 $a+2\mathrm{i}=1+b+(b-1)\mathrm{i}$. 则由复数相等的充要条件得 $\begin{cases}a=1+b,\\2=b-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=4,\\b=3.\end{cases}$ 所以 $|z|=|4+3\mathrm{i}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$. 故选 D.

3. A 【解析】画出满足约束条件的平面区域，如图所示，平移直线 $y=\dfrac{1}{2}x$，当经过直线 $2x+y-2=0$ 与 $x+2y+2=0$ 的交点 A 时，目标函数 $z=-x+2y$ 取得最小值. 联立 $\begin{cases}2x+y-2=0,\\x+2y+2=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2,\\y=-2.\end{cases}$ 所以 $A(2,-2)$. 所以 $z_{\min}=-2+2\times(-2)=-6$. 故选 A.

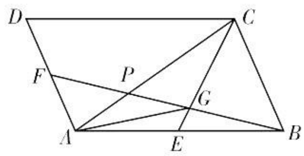


4. A 【解析】由题意知 $GN=24$ 米，$F=8$，则由 $F=\dfrac{GN}{L}$，得 $L=\dfrac{GN}{F}=\dfrac{24}{8}=3$(米). 故选 A.

5. D 【解析】由程序框图可知，初始值 $T=1,n=1,i=1$，第一次循环：$T=-2,n=2,i=1$；第二次循环：$T=-4,n=3,i=1$；第三次循环：$T=8,n=4,i=1$；第四次循环：$T=16,n=5,i=2$；第五次循环：$T=-32,n=6,i=2$；第六次循环：$T=-64,n=7,i=2$；第七次循环：$T=128$，此时 $n=7,i=2$ 满足循环条件，所以输出 $T=128$. 故选 D.

6. A 【解析】因为点 Q 为线段 MN 的中点，且 $|MN|=2\sqrt{3}$，所以 $|OQ|=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{|MN|}{2}\right)^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$. 所以点 Q 在以原点 O 为圆心，1 为半径的圆上，所以 $|OP|_{\min}=|OC|-1=\sqrt{5^2+(-12)^2}-1=12$. 所以 $|PQ|_{\min}=|OP|_{\min}-1=11$. 故选 A.

7. A 【解析】方法一：由 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FD}$，知 E,F 分别为 AB,AD 的中点. 如图，设 AC 与 BF 的交点为 P，易得 $\triangle APF\backsim\triangle CPB$，所以 $\dfrac{AP}{CP}=\dfrac{AF}{CB}=\dfrac{AF}{AD}=\dfrac{1}{2}$，所以 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. 因为点 E 是 AB 的中点，所以 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. 由 P,G,B 三点共线知，存在 $m\in\mathbf{R}$，满足 $\overrightarrow{AG}=m\overrightarrow{AP}+(1-m)\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{3}m\overrightarrow{AC}+(1-m)\overrightarrow{AB}$. 由 C,G,E 三点共线知，存在 $n\in\mathbf{R}$，满足 $\overrightarrow{AG}=n\overrightarrow{AE}+(1-n)\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}n\overrightarrow{AB}+(1-n)\overrightarrow{AC}$. 所以 $\dfrac{1}{3}m\overrightarrow{AC}+(1-m)\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}n\overrightarrow{AB}+(1-n)\overrightarrow{AC}$.

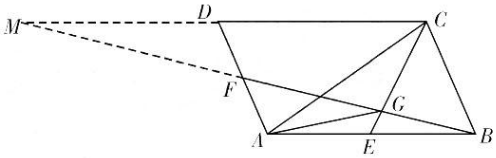


又因为 $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$ 为不共线的非零向量，所以 $\begin{cases}1-m=\dfrac{1}{2}n,\\\dfrac{1}{3}m=1-n,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=\dfrac{3}{5},\\n=\dfrac{4}{5},\end{cases}$ 所以 $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC}$. 故选 A.

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

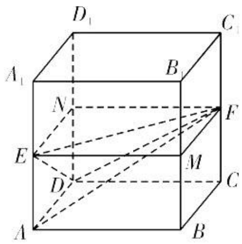
方法二：(两次利用三点共线的性质)由$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FD}$，知$E$，$F$分别为$AB$，$AD$的中点．因为$C$，$G$，$E$三点共线，所以存在实数$\lambda$使得$\overrightarrow{AG}=\lambda\overrightarrow{AC}+(1-\lambda)\overrightarrow{AE}=\lambda(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})+\frac{1}{2}(1-\lambda)\overrightarrow{AB}=2\lambda\overrightarrow{AF}+\frac{1}{2}(1+\lambda)\overrightarrow{AB}$．又$F$，$B$，$G$三点共线，所以$2\lambda+\frac{1}{2}(1+\lambda)=1$，解得$\lambda=\frac{1}{5}$．故$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}+\frac{4}{5}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$．故选A．

方法三：由$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FD}$，知$E$，$F$分别为$AB$，$AD$的中点．由$B$，$G$，$F$三点共线得，存在$\lambda\in(0,1)$，满足$\overrightarrow{BG}=\lambda\overrightarrow{BF}=\lambda(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF})=\lambda\overrightarrow{BA}+\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{BC}$．由$C$，$G$，$E$三点共线得，存在$\mu\in\mathbf{R}$，满足$\overrightarrow{BG}=\mu\overrightarrow{BC}+(1-\mu)\overrightarrow{BE}=\mu\overrightarrow{BC}+\frac{1-\mu}{2}\overrightarrow{BA}$，则$\begin{cases}\lambda=\frac{1-\mu}{2},\\ \frac{\lambda}{2}=\mu,\end{cases}$解得$\begin{cases}\lambda=\frac{2}{5},\\ \mu=\frac{1}{5},\end{cases}$所以$\overrightarrow{BG}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$，则$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$．故选A．



方法四：如图，延长BF交CD的延长线于点M．由$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FD}$，知$E$，$F$分别为$AB$，$AD$的中点，所以$FD\underline{\parallel}\frac{1}{2}BC$，所以点$D$为$MC$的中点．易得$\triangle GCM\backsim\triangle GEB$，所以$\frac{GC}{GE}=\frac{CM}{EB}=4$，所以$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AE}+\frac{1}{5}\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AE}+\frac{1}{5}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE})=\frac{4}{5}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$．故选A．

8．B 【解析】设正方体的棱长为a，则由题意知$a^3=8$，解得$a=2$．



方法一：如图，分别取BB_1，DD_1的中点M，N，连接ME，MF，NE，NF，则根据正方体的对称性与长方体的结构特征知长方体$ABCD-EMFN$的外接球就是四面体$FADE$的外接球．设所求外接球的半径为R，因为长方体的长、宽、高分别为2，2，1，所以$(2R)^2=1^2+2^2+2^2=9$，所以四面体$FADE$外接球的表面积为$4\pi R^2=9\pi$．故选B．

方法二：由题易得，$AD\perp DF$，$AE\perp EF$，所以$\triangle ADF$，$\triangle AEF$是有公共斜边AF的直角三角形，所以AF为外接球的直径，AF的中点为四面体$FADE$外接球的球心．设所求外接球的半径为R，因为点E，F分别是AA_1，CC_1的中点，所以$(AF)^2=(2R)^2=1^2+2^2+2^2=9$，所以四面体$FADE$外接球的表面积为$4\pi R^2=9\pi$．故选B．

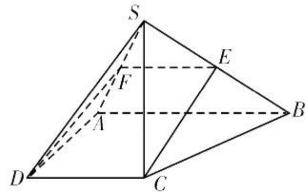
9．D 【解析】方法一：由题图易知点$\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$为“五点作图法”中的第一个零点，所以$-\frac{\pi\omega}{6}+\varphi=0$①．由$f(x)$在$x=\frac{7\pi}{12}$处取得最小值，得$\frac{7\pi\omega}{12}+\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$②．联立①②消去$\omega$，得$\varphi=\frac{4k-1}{9}\pi$，$k\in\mathbf{Z}$．因为$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以$k=1$，所以$\varphi=\frac{\pi}{3}$，$\omega=2$．所以$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，所以$f\left(\frac{x}{2}\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$．当$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即$\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$时，函数$f\left(\frac{x}{2}\right)$单调递减．因为$x\in[0,\pi]$，所以函数$f\left(\frac{x}{2}\right)$在$[0,\pi]$上的单调递减区间为$\left[\frac{\pi}{6},\pi\right]$．故选D．

方法二：由题可得，$\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$为函数$f(x)$的一个对称中心，$x=\frac{7\pi}{12}$时取得最小值，即直线$x=\frac{7\pi}{12}$为函数$f(x)$的一条对称轴，所以$\frac{7\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}T+kT(k\in\mathbf{N})$，即$\frac{3\pi}{4}=\frac{3+4k}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega}$，得$\omega=\frac{2(3+4k)}{3}$．因为$\frac{\pi}{6}<\frac{T}{4}$，即$\frac{\pi}{6}<\frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega}$，所以$0<\omega<3$．又$\omega\in\mathbf{N}^*$，所以$k=0$，$\omega=2$．所以$f(x)=2\sin(2x+\varphi)$．将$\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$代入，得$-\frac{\pi}{3}+\varphi=2k'\pi(k'\in\mathbf{Z})$，$\varphi=\frac{\pi}{3}+2k'\pi$．因为$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以$k'=0$，$\varphi=\frac{\pi}{3}$．所以$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，所以

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

$f\left(\frac{x}{2}\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$. 当 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,即 $\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 时,函数 $f\left(\frac{x}{2}\right)$ 单调递减. 因为 $x\in[0,\pi]$,所以函数 $f\left(\frac{x}{2}\right)$ 在 $[0,\pi]$ 上的单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{6},\pi\right]$. 故选 D.

10. C 【解析】如图,取 SA 的中点 F,连接 DF,EF. 因为 E 为 SB 的中点,所以 $EF\underline{\mathbin{/\mkern-4mu/}}\frac{1}{2}AB$. 又由 $CD\underline{\mathbin{/\mkern-4mu/}}\frac{1}{2}AB$,得 $CD\underline{\mathbin{/\mkern-4mu/}}EF$,所以四边形 $CDFE$ 为平行四边形,故 $CE\mathbin{/\mkern-4mu/}DF$. 所以异面直线 SD 与 CE 所成的角为 $\angle SDF$(或其补角). 因为 $SC\perp$ 平面 $ABCD$,所以 $SC\perp AD$. 又 $AB\perp AD$,即 $DC\perp AD$,且 $DC\cap SC=C$,所以 $AD\perp$ 平面 SDC. 所以 $AD\perp SD$. 所以 $SA=\sqrt{AD^2+SD^2}=\sqrt{5}$. 因为在 $\mathrm{Rt}\triangle SDA$ 中,F 为 SA 的中点,所以 $DF=SF$. 所以 $\angle SDF=\angle DSA$,且两角均为锐角. 所以 $\cos\angle SDF=\cos\angle DSA=\frac{SD}{SA}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 故选 C.



11. A 【解析】在 $\mathrm{Rt}\triangle DOF_1$ 中,$|OF_1|=c$,$\angle DF_1F_2=\frac{\pi}{3}$,所以 $|DF_1|=2c$,$|AF_1|=\frac{\sqrt{2}+1}{2}|DF_1|=(\sqrt{2}+1)c$. 由双曲线的定义知 $|AF_2|=2a+|AF_1|=2a+(\sqrt{2}+1)c$. 又在 $\triangle AF_1F_2$ 中,$|F_1F_2|=2c$,$\angle AF_1F_2=\frac{2\pi}{3}$,所以由余弦定理,得 $\cos\angle AF_1F_2=\frac{|AF_1|^2+|F_1F_2|^2-|AF_2|^2}{2|AF_1||F_1F_2|}$,即 $\frac{[(\sqrt{2}+1)c]^2+(2c)^2-[2a+(\sqrt{2}+1)c]^2}{2(\sqrt{2}+1)c\times 2c}=-\frac{1}{2}$,化简得 $(3+\sqrt{2})c^2-2(\sqrt{2}+1)ac-2a^2=0$,即 $(3+\sqrt{2})e^2-2(\sqrt{2}+1)e-2=0$. 结合 $e>1$,解得 $e=\sqrt{2}$. 故选 A.

12. D 【解析】因为 $f(x+2)+f(x)=\sqrt{2}f(x+1)$,所以 $f(x+2)=\sqrt{2}f(x+1)-f(x)$.

所以 $f(x+3)=\sqrt{2}f(x+2)-f(x+1)=\sqrt{2}[\sqrt{2}f(x+1)-f(x)]-f(x+1)=f(x+1)-\sqrt{2}f(x)$.

所以 $f(x+4)=f(x+2)-\sqrt{2}f(x+1)=\sqrt{2}f(x+1)-f(x)-\sqrt{2}f(x+1)=-f(x)$.

所以 $f(x+8)=-f(x+4)=f(x)$. 故函数 $f(x)$ 的一个周期为 8,所以 A 错误;

因为对任意的 $x\in\mathbf{R}$,都有 $g(x+4)=g(x)+g(2)$,$g(x)$ 为偶函数,令 $x=-2$,得 $g(-2+4)=g(-2)+g(2)$,解得 $g(-2)=0$,$g(2)=g(-2)=0$,所以 $g(x+4)=g(x)$. 因为 $g(x)$ 不恒为 0,所以函数 $g(x)$ 的一个周期为 4,所以 B 错误;

令 $F(x)=f(x)+g(x)$,因为 $f(x)$ 的一个周期为 8,且周期不为 4,$g(x)$ 的一个周期为 4,所以 $F(x+8)=f(x+8)+g(x+8)=F(x)$. 所以 $f(x)+g(x)$ 的一个周期为 8. 所以 C 错误;

$f(66)+g(66)=f(8\times 8+2)+g(4\times 16+2)=f(2)+g(2)=3$,所以 D 正确. 故选 D.

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. $\frac{3}{5}$ 【解析】记"黄瓜、南瓜、丝瓜、苦瓜、白瓜"分别为 A,B,C,D,E,则小明的外婆从这 5 种新鲜瓜类蔬菜中任意购买 3 种的情况有:$ABC,ABD,ABE,ACD,ACE,ADE,BCD,BCE,BDE,CDE$,共 10 种,其中购买苦瓜的情况共 6 种,故小明的外婆购买的瓜类蔬菜中含苦瓜的概率为 $P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

14. $\frac{1}{4}$ 【解析】因为曲线 C 的方程为 $y=2\sqrt{x}$,即 $y^2=4x(y\geqslant 0)$,所以由题意及抛物线的对称性知,点 P 在抛物线 $y^2=4x(y\in\mathbf{R})$ 上,且在 x 轴的下方,点 $F(1,0)$ 为此抛物线的焦点. 由抛物线的定义可知 $|PF|=|x_0+1|$,则 $|x_0+1|=\frac{1}{3}|x_0-4|$,解得 $x_0=\frac{1}{4}$ 或 $x_0=-\frac{7}{2}$(舍去),所以点 P 的横坐标为 $\frac{1}{4}$.

15. 4 【解析】由题意,知 $\{a_n-1\}$ 是首项为 $a_1-1=2$,公比为 3 的等比数列,所以 $a_n-1=2\times 3^{n-1}$,所以 $a_n=2\times$

$3^{n-1}+1$.所以$\frac{a_n-1}{a_na_{n+1}}=\frac{2\times3^{n-1}}{(2\times3^{n-1}+1)(2\times3^n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\times3^{n-1}+1}-\frac{1}{2\times3^n+1}\right)$,所以$\frac{a_1-1}{a_1a_2}+\frac{a_2-1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{a_n-1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{19}+\cdots+\frac{1}{2\times3^{n-1}+1}-\frac{1}{2\times3^n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2\times3^n+1}\right)=\frac{1}{6}-\frac{1}{4\times3^n+2}=\frac{80}{489}$,解得 $n=4$.

16. $y=x$ 或 $y=ex-1$(只答一个不得分) 【解析】根据题意,设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象的公切线为直线 l,并设直线 l 与函数 $y=f(x)$ 的图象相切于点$(m,\ln m+1)$,与函数 $y=g(x)$ 的图象相切于点(n,e^n-1).由 $f(x)=\ln x+1$,得$f'(x)=\frac{1}{x}$,所以直线 l 的斜率为 $f'(m)=\frac{1}{m}$,则直线 l 的方程为 $y-\ln m-1=\frac{1}{m}(x-m)$,即 $y=\frac{1}{m}x+\ln m$.又由$g(x)=e^x-1$,得 $g'(x)=e^x$,所以直线 l 的斜率为 $g'(n)=e^n$,则直线 l 的方程为 $y-e^n+1=e^n(x-n)$,即$y=e^nx+(1-n)e^n-1$.由题意知$\begin{cases}\frac{1}{m}=e^n,\\ \ln m=(1-n)e^n-1,\end{cases}$ 消去 m,得$(1-n)(e^n-1)=0$,解得 $n=0$ 或 $n=1$.所以公切线的方程为 $y=x$ 或 $y=ex-1$.

三、解答题:共 70 分.解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【解析】(1)因为 $n\geqslant2$ 时,$(a_n-a_{n-1})S_n+a_{n-1}S_{n-1}=a_nS_{n-1}+a_{n-1}+1$,

所以$(S_n-S_{n-1})a_n-(S_n-S_{n-1})a_{n-1}=a_{n-1}+1$. ………… 1 分

所以 $a_n^2-a_na_{n-1}-a_{n-1}-1=0$,即$(a_n+1)(a_n-a_{n-1}-1)=0$. ………… 2 分

因为 $a_n>0$,所以 $a_n-a_{n-1}=1$. ………… 3 分

故数列$\{a_n\}$是首项为 1,公差为 1 的等差数列. ………… 4 分

所以 $a_n=1+(n-1)\times1=n,n\in\mathbf{N}^*$. ………… 5 分

(2)由(1),得 $b_n=\begin{cases}2^n,n=2k-1,\\ 2n,n=2k\end{cases}(k\in\mathbf{N}^*)$, ………… 6 分

所以 $T_{2n}=(b_1+b_3+\cdots+b_{2n-1})+(b_2+b_4+\cdots+b_{2n})$

$=(2+2^3+\cdots+2^{2n-1})+(4+8+\cdots+4n)$ ………… 8 分

$=\frac{2(1-4^n)}{1-4}+\frac{n(4+4n)}{2}$ ………… 9 分

$=\frac{2}{3}(4^n-1)+2n^2+2n,n\in\mathbf{N}^*$. ………… 10 分

18.【解析】(1)因为 $a\sin A+4b\sin C\cos^2A=b\sin B+c\sin C$,

所以由正弦定理,得 $a^2+4bc\cos^2A=b^2+c^2$. ………… 1 分

所以 $2\cos^2A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\cos A$,解得 $\cos A=0$ 或 $\cos A=\frac{1}{2}$. ………… 3 分

因为 $A\in(0,\pi)$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$ 或 $A=\frac{\pi}{2}$. ………… 4 分

因为$\triangle ABC$ 为斜三角形,所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ………… 5 分

(2)由(1)可知 $A=\frac{\pi}{3}$,当 $a=3$ 时,

由正弦定理,得$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}$, ………… 6 分

所以 $b+c=2\sqrt{3}\sin B+2\sqrt{3}\sin C$ ………… 7 分

$=2\sqrt{3}\sin B+2\sqrt{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)$ ………… 8 分

$=2\sqrt{3}\sin B+3\cos B+\sqrt{3}\sin B=6\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$. …………………………………… 9 分

因为 $B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$，所以 $B+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$.

所以 $\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{1}{2},1\right]$. …………………………………… 11 分

所以 $b+c\in(3,6]$. …………………………………… 12 分

19.【解析】(1)由条形统计图，得 $\overline{x}=\frac{1}{5}\times(1+2+3+4+5)=3$， …………………………………… 1 分

$\overline{y}=\frac{204+220+298+396+482}{5}=320$， …………………………………… 2 分

所以 $\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2=(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+(x_3-\overline{x})^2+(x_4-\overline{x})^2+(x_5-\overline{x})^2$

$=(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2$

$=10$， …………………………………… 3 分

$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=(-2)\times(-116)+(-1)\times(-100)+0\times(-22)+1\times76+2\times162=732$. ……… 4 分

所以 $r=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(y_i-\overline{y})^2}}=\frac{732}{\sqrt{10}\times\sqrt{55\ 960}}=\frac{732}{20\sqrt{1\ 399}}\approx\frac{732}{2\times374}\approx0.98$. …………… 5 分

因为相关系数 $r\approx0.98>0.75$，所以 y 与 x 具有很强的线性相关关系，且为正相关. …………………… 6 分

(2) $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2}=\frac{732}{10}=73.2$， …………………………………… 7 分

所以 $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\,\overline{x}=320-73.2\times3=100.4$， …………………………………… 8 分

所以 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}=73.2x+100.4$. …………………………………… 9 分

由题意知，2023 年对应的年份代码 $x=7$，

当 $x=7$ 时，$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}=73.2\times7+100.4=612.8$， …………………………………… 11 分

故预测 2023 年该公司的研发人数约为 613 人. …………………………………… 12 分

20.【解析】(1)因为 $\triangle A_1B_1D$ 为等边三角形，平行四边形 AA_1B_1B 的对角线 AB_1 与 A_1B 相交于点 D，

所以 $B_1D=A_1D=BD$. 所以 $\triangle A_1B_1B$ 为直角三角形. 所以 $A_1B_1\perp BB_1$. …………………………………… 1 分

因为 $A_1B_1/\!/AB$，$BB_1/\!/AA_1$，所以 $AA_1\perp AB$. …………………………………… 2 分

又 $A_1A\perp AC$，且 $AC\cap AB=A$，$AC\subset$ 平面 ABC，$AB\subset$ 平面 ABC，所以 $AA_1\perp$ 平面 ABC. ………… 3 分

因为 $BC\subset$ 平面 ABC，所以 $AA_1\perp BC$. …………………………………… 4 分

又因为 $A_1C\perp BC$，且 $AA_1\cap A_1C=A_1$，$AA_1\subset$ 平面 AA_1C_1C，$A_1C\subset$ 平面 AA_1C_1C，

所以 $BC\perp$ 平面 AA_1C_1C. …………………………………… 5 分

(2)由题意，知 D 为 A_1B 的中点，则 $V_{B-A_1AC}=2V_{D-A_1AC}=8$，即 $V_{A_1-ABC}=8$.

…………………………………… 6 分

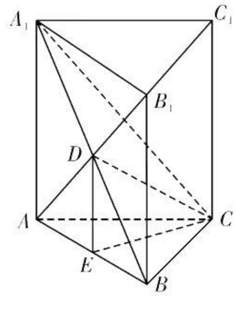
由 $\triangle A_1B_1D$ 为等边三角形，得 $\triangle ABD$ 也是等边三角形.

如图，取 AB 的中点 E，连接 CE，DE，则 $DE\perp AB$，$DE=\frac{1}{2}AA_1$.

因为平面 $ABD\cap$ 平面 $ABC=AB$，所以 $DE\perp$ 平面 ABC，所以 $DE\perp CE$.

设 $AB=x$，则 $AA_1=2BC=2DE=\sqrt{3}x$，$AC=\frac{1}{2}x$.

所以由 $V_{A_1-ABC}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}\cdot AA_1=\frac{1}{8}x^3=8$，得 $x=4$. ………………………… 8 分



所以 $DE=2\sqrt{3}$，$CE=\frac{1}{2}AB=2$，$CD=\sqrt{DE^2+CE^2}=4$. ………………………………… 9 分

又 $AD=4$，$AC=2$，

所以 $S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times AC\times\sqrt{AD^2-\left(\frac{1}{2}AC\right)^2}=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$.

……………………………………………………………………………………… 10 分

设点 B 到平面 ACD 的距离为 h，

因为 $V_{D-ABC}=V_{D-AA_1C}=4$，所以 $4=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ACD}\cdot h=\frac{1}{3}\times\sqrt{15}\times h$，所以 $h=\frac{4\sqrt{15}}{5}$. ………… 11 分

故点 B 到平面 ACD 的距离为 $\frac{4\sqrt{15}}{5}$. ………………………………………… 12 分

21.【解析】(1)由 $\triangle BA_1A_2$ 的面积为 2，得 $\frac{1}{2}\times 2a\times b=2$，即 $ab=2$①. ………………………… 1 分

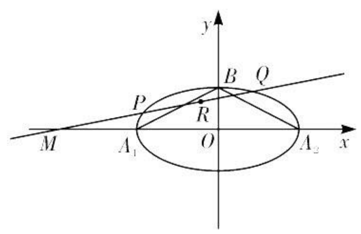
因为 $M(-4,0)$，$A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$，

所以由 $\overrightarrow{MA_2}=3\overrightarrow{MA_1}$，得 $a+4=3(-a+4)$，………………………………………… 2 分

解得 $a=2$，代入①，得 $b=1$. ……………………………………………………………… 3 分

故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………………………………… 4 分

(2)方法一：由题意可知直线 l 的方程为 $y=k_1(x+4)(k_1\neq 0)$，



联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y=k_1(x+4),\end{cases}$ 消去 y 可得 $(4k_1^2+1)x^2+32k_1^2x+64k_1^2-4=0$，

…………………………………………………………………… 5 分

令 $\Delta=(32k_1^2)^2-4(4k_1^2+1)(64k_1^2-4)=16(1-12k_1^2)>0$，则 $0<k_1^2<\frac{1}{12}$.

……………………………………………………………………………………… 6 分

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$R(x_3,y_3)$，则 $x_1+x_2=\frac{-32k_1^2}{4k_1^2+1}$，$x_1x_2=\frac{64k_1^2-4}{4k_1^2+1}$. ………………………… 7 分

由 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{PR}$，得 $|\overrightarrow{MP}|\cdot|\overrightarrow{RQ}|=|\overrightarrow{MQ}|\cdot|\overrightarrow{PR}|$.

所以 $\frac{|\overrightarrow{MP}|}{|\overrightarrow{MQ}|}=\frac{|\overrightarrow{PR}|}{|\overrightarrow{RQ}|}$，所以 $\frac{x_1+4}{x_2+4}=\frac{x_3-x_1}{x_2-x_3}$. ………………………………………… 9 分

解得 $x_3=\frac{2x_1x_2+4(x_1+x_2)}{x_1+x_2+8}=\frac{2\times\frac{64k_1^2-4}{4k_1^2+1}+4\times\frac{-32k_1^2}{4k_1^2+1}}{\frac{-32k_1^2}{4k_1^2+1}+8}=-1$，$y_3=3k_1$，所以 $R(-1,3k_1)$. ………… 11 分

故 $\frac{k_2}{k_1}=\frac{1}{k_1}\times(-3k_1)=-3$，即 $\frac{k_2}{k_1}$ 为定值. ………………………………………… 12 分

方法二：由题可设直线 l 的方程为 $x=my-4(m\neq 0)$，

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\ x=my-4\end{cases}$，消去 x 可得 $(m^2+4)y^2-8my+12=0$，………………………… 5 分

令 $\Delta>0$，即 $(8m)^2-48(m^2+4)>0$，即 $m^2>12$，…………………………………… 6 分

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$R(x_0,y_0)$，由根与系数的关系可得 $y_1+y_2=\frac{8m}{m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{12}{m^2+4}$. ………… 7 分

由 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{PR}$，得 $|\overrightarrow{MP}|\cdot|\overrightarrow{RQ}|=|\overrightarrow{MQ}|\cdot|\overrightarrow{PR}|$，所以 $\frac{|\overrightarrow{MP}|}{|\overrightarrow{MQ}|}=\frac{|\overrightarrow{PR}|}{|\overrightarrow{RQ}|}$，即得 $\frac{y_1}{y_2}=\frac{y_0-y_1}{y_2-y_0}$. …… 9 分

化简得 $y_0=\frac{2y_1y_2}{y_1+y_2}=\frac{2\times12}{8m}$. 所以 $y_0=\frac{3}{m}$, $x_0=my_0-4=-1$. 故 $k_2=-\frac{3}{m}$, $k_1=\frac{1}{m}$. ………………… 11 分

所以 $\frac{k_2}{k_1}=-3$, 即 $\frac{k_2}{k_1}$ 为定值. ………………………………………………………………… 12 分

22.【解析】(1) 当 $a=1$ 时, $f(x)=xe^x-x$, $x\in\mathbf{R}$, 则 $f'(x)=(x+1)e^x-1$. ……………………………… 1 分

注意到 $f'(0)=0$, 易知当 $x>0$ 时, $f'(x)>0$; 当 $x<0$ 时, $f'(x)<0$. ………………………………… 3 分

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$, 单调递减区间为 $(-\infty,0)$. ………………………………… 4 分

(2) 方法一: $g(x)=f(x)-a\ln x=xe^x-ax-a\ln x=xe^x-a\ln(xe^x)$, 定义域为 $(0,+\infty)$. …………… 5 分

令 $t=xe^x$, 则当 $x>0$ 时, $t'=(x+1)e^x>0$,

所以函数 $t=xe^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, 所以 $t\in(0,+\infty)$,

所以当 $a>e$ 时, $g(x)=xe^x-a\ln(xe^x)$ 有两个零点等价于当 $a>e$ 时, $h(t)=t-a\ln t(t>0)$ 有两个零点.
……………………………………………………………………………………………………… 7 分

$h'(t)=1-\frac{a}{t}=\frac{t-a}{t}$, 令 $h'(t)=0$, 则 $t=a$. 当 $t>a$ 时, $h'(t)>0$; 当 $0<t<a$ 时, $h'(t)<0$,

所以 $h(t)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递增, 在 $(0,a)$ 上单调递减,

所以 $h(t)_{\min}=h(a)=a-a\ln a=a(1-\ln a)$. ……………………………………………………………… 8 分

因为 $a>e$, 所以 $h(a)<0$.

又因为 $h(1)=1>0$, 所以只需证明当 $a>e$ 时, $h(e^a)=e^a-a^2>0$. …………………………………… 9 分

设 $v(x)=e^x-x^2(x>e)$, 则 $v'(x)=e^x-2x$.

令 $\varphi(x)=e^x-2x(x>e)$, 则 $\varphi'(x)=e^x-2>e^e-2>0$,

所以 $\varphi(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递增, $v'(x)=\varphi(x)>\varphi(e)=e^e-2e>0$,

所以函数 $v(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递增, $v(x)=e^x-x^2>e^e-e^2>0$, 即 $h(e^a)=e^a-a^2>0$,

所以 $h(t)$ 在 $(1,a)$, (a,e^a) 上各存在一个零点, ……………………………………………………… 11 分

所以当 $a>e$ 时, 函数 $h(t)$ 有两个零点, 即函数 $g(x)$ 有两个零点. ……………………………………… 12 分

方法二: $g(x)=f(x)-a\ln x=xe^x-ax-a\ln x=xe^x-a\ln(xe^x)$, 定义域为 $(0,+\infty)$. ……………… 5 分

令 $t=xe^x$, 则当 $x>0$ 时, $t'=(x+1)e^x>0$,

所以函数 $t=xe^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, 所以 $t\in(0,+\infty)$,

所以当 $a>e$ 时, $g(x)=xe^x-a\ln(xe^x)$ 有两个零点等价于当 $a>e$ 时, $h(t)=t-a\ln t(t>0)$ 有两个零点.
……………………………………………………………………………………………………… 7 分

所以当 $a>e$ 时, 方程 $t-a\ln t=0$ 有两个不同的实数根, 即 $\frac{\ln t}{t}=\frac{1}{a}$ 有两个不同的实数根. …………… 8 分

令 $H(t)=\frac{\ln t}{t}$, $t>0$, 则只需证函数 $H(t)$ 的图象与直线 $y=\frac{1}{a}$ 有两个交点.

因为 $H'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}$, 令 $H'(t)=0$, 得 $t=e$.

当 $t\in(0,e)$ 时, $H'(t)>0$, 所以 $H(t)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增; 当 $t\in(e,+\infty)$ 时, $H'(t)<0$, 所以 $H(t)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减. 所以 $H(t)_{\max}=H(e)=\frac{1}{e}$.

又 $H(1)=0$, 当 $t\to0$ 时, $H(t)\to-\infty$; 当 $t\to+\infty$ 时, $H(t)\to0$.

所以 $0<\frac{1}{a}<\frac{1}{e}$ 时, 即 $a>e$ 时, 函数 $H(t)$ 的图象与直线 $y=\frac{1}{a}$ 有两个交点, 即函数 $g(x)$ 有两个零点.
……………………………………………………………………………………………………… 12 分

官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜
自主选拔在线