2023届陕西省第四次模拟考试

理科数学参考答案

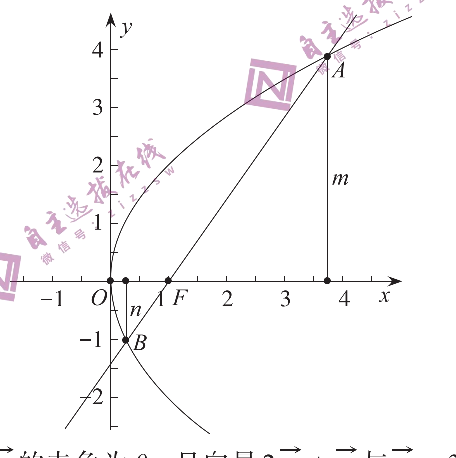
1. B　**解析：** 因为集合 $A=\{x\,|\,|x-1|<1\}=(0,2)$，$B=\{x|x^2+x\geqslant 0\}=(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$，$A\cap B=(0,2)$，$(C_UA)\cup(C_UB)=C_U(A\cap B)=(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$.

2. A　**解析：** 因为 $z\cdot(3+2i)=-1+3i$，所以 $z=\dfrac{-1+3i}{3+2i}=\dfrac{(-1+3i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\dfrac{3}{13}+\dfrac{11}{13}i$，则 z 的虚部为 $\dfrac{11}{13}$.

3. C　**解析：** 如图，2020年的货物进出口总额为142936+179279=322215亿元，故选项A正确；2020年的货物进出口顺差为179279-142936=36343亿元，故选项B正确；2020年的货物进口总额为142936亿元，相对于2019的货物进口总额143254亿元下降了，故选项C错误；2017—2021年，货物出口总额逐年上升，故选项D正确.

4. C　**解析：** 由 $PH=-\lg[H^+]=-\lg(6\times10^{-8})=8-\lg 6\approx 8-0.78=7.22$.

5. A　**解析：** 因为直线 $l:\sqrt{2}x-y-\sqrt{2}=0$ 过抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点 $F(1,0)$，且与 C 交于 A，B 两点，设直线 l 的倾斜角为 θ，则 $\tan\theta=\sqrt{2}$，所以 $|AF|=\dfrac{2}{1-\cos\theta}$，$|BF|=\dfrac{2}{1+\cos\theta}$，则 $m=|AF|\sin\theta=\dfrac{2\sin\theta}{1-\cos\theta}$，$n=|BF|\sin\theta=\dfrac{2\sin\theta}{1+\cos\theta}$，所以，$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1-\cos\theta}{2\sin\theta}+\dfrac{1+\cos\theta}{2\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{6}}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

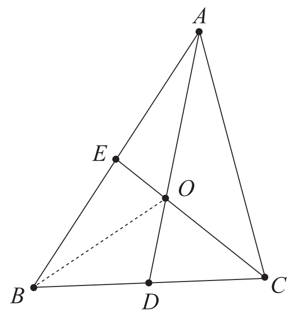


6. A　**解析：** 因为单位向量 $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$ 的夹角为 θ，且向量 $2\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$ 与 $\overrightarrow{e_1}-3\overrightarrow{e_2}$ 的夹角为 120°，所以 $\cos 120^\circ=\dfrac{(2\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2})\cdot(\overrightarrow{e_1}-3\overrightarrow{e_2})}{|2\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}||\overrightarrow{e_1}-3\overrightarrow{e_2}|}=\dfrac{-1-5\cos\theta}{\sqrt{5+4\cos\theta}\sqrt{10-6\cos\theta}}=-\dfrac{1}{2}$，$62\cos^2\theta+15\cos\theta-23=0$，$(2\cos\theta-1)(31\cos\theta+23)=0\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ 或 $\cos\theta=-\dfrac{23}{31}$（舍）.

7. C　**解析：** 如图，连接 BO，$\because a=3$，$b=4$，$c=\sqrt{13}$，$\therefore\cos\angle ACB=\dfrac{3^2+4^2-\sqrt{13}^2}{2\times3\times4}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\angle ACB=\dfrac{\pi}{3}$.

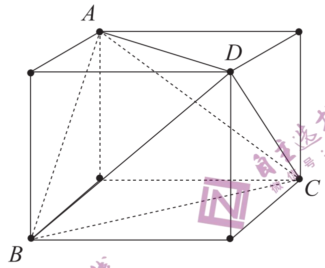
因为点D，E分别是边BC，BA的中点，且AD，CE交于点O，所以O为ΔABC的重心，则$\dfrac{OE}{CE}=\dfrac{1}{3}$，则$\dfrac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta ACB}}=\dfrac{1}{3}$，又因为$\dfrac{S_{\Delta EOB}}{S_{\Delta AOB}}=\dfrac{1}{2}$，所以$S_{\Delta EOB}=\dfrac{1}{6}S_{\Delta ACB}$，同理，$S_{\Delta DOB}=\dfrac{1}{6}S_{\Delta ACB}$，

则 $S_{BDOE}=\dfrac{1}{6}S_{\Delta ACB}+\dfrac{1}{6}S_{\Delta ACB}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ACB}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 3\times 4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，即四边形$BDOE$的面积为$\sqrt{3}$.



8. B　**解析**：由题意得该四面体$ABCD$的直观图如图所示，图中长方体的棱长分别为2，1，$\sqrt{3}$，则四面体$ABCD$的体积为

$V=2\times 1\times\sqrt{3}-4\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 2\times 1\times\sqrt{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.



9. C　**解析**：因为函数$f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$，$(\omega>0,\ -\pi<\varphi<0)$，$f(0)=\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$，

所以$f(x)=\cos(\omega x-\dfrac{\pi}{6})$，$f(x)=\cos(\omega x-\dfrac{\pi}{6})=0\Rightarrow\omega x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\Rightarrow x=\dfrac{\frac{2}{3}\pi+k\pi}{\omega}$，$k\in Z$.

所以

$$\begin{cases}\dfrac{\frac{2}{3}\pi+49\pi}{\omega}\leqslant 100\pi\\[2ex]\dfrac{\frac{2}{3}\pi-51\pi}{\omega}<-100\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\omega\geqslant\dfrac{149}{300}\\[2ex]\omega<\dfrac{151}{300}\end{cases}\Rightarrow\dfrac{149}{300}\leqslant\omega<\dfrac{151}{300}$$

，所以ω的取值范围是是$\left[\dfrac{149}{300},\ \dfrac{151}{300}\right)$，故选C.

10. C　**解析**：第三次摸到红球包括四种情况：

①第一次摸到红球，第二次摸到红球，第三次摸到红球，概率为$P_1=\dfrac{3\times 2\times 1}{9\times 8\times 7}=\dfrac{1}{84}$；

②第一次摸到红球，第二次摸到黑球，第三次摸到红球，概率为$P_2=\dfrac{3\times 6\times 2}{9\times 8\times 7}=\dfrac{6}{84}$；

③第一次摸到黑球，第二次摸到红球，第三次摸到红球，概率为$P_2=\dfrac{6\times 3\times 2}{9\times 8\times 7}=\dfrac{6}{84}$；

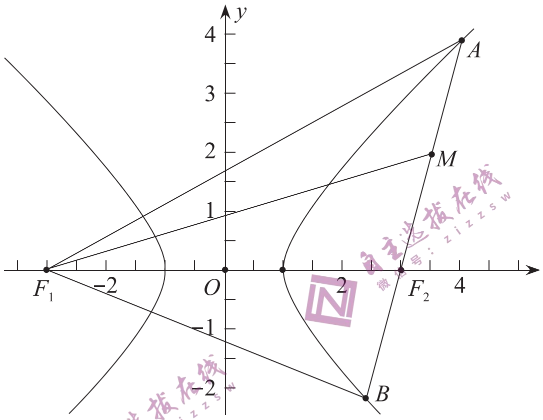
④第一次摸到黑球，第二次摸到黑球，第三次摸到红球，概率为$P_2=\dfrac{6\times 5\times 3}{9\times 8\times 7}=\dfrac{15}{84}$；

所以第三次摸到红球的概率为$P=P_1+P_2+P_3+P_4=\dfrac{1}{84}+\dfrac{6}{84}+\dfrac{6}{84}+\dfrac{15}{84}=\dfrac{28}{84}=\dfrac{1}{3}$，故选C.

11. B　**解析**：设$|BF_2|=t$，因为$\overrightarrow{AF_2}=2\overrightarrow{F_2B}$，所以$|AF_2|=2t$，由$|BF_1|-|BF_2|=2a\Rightarrow|BF_1|=t+2a$，由$|AF_1|-|AF_2|=2a\Rightarrow|AF_1|=2t+2a$.设$|F_1F_2|=2c$，$c^2=a^2+b^2$，因为$\angle ABF_1=60°$，在$\Delta BF_1F_2$中，$\cos\angle F_1BF_2=\cos 60°=\dfrac{1}{2}=\dfrac{(t+2a)^2+t^2-(2c)^2}{2\times(t+2a)\times t}\Rightarrow t^2+2at+4a^2-4c^2=0$①；

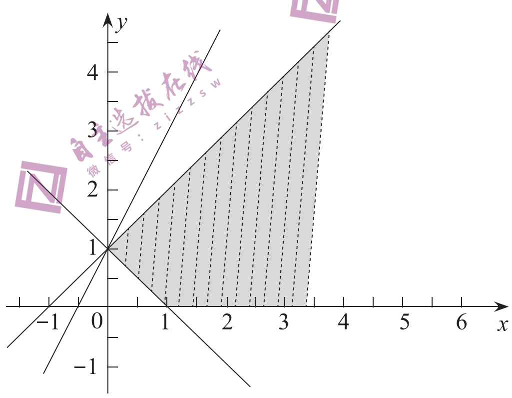
在 ΔBF_1A 中，$\cos\angle F_1BA=\cos 60°=\dfrac{1}{2}=\dfrac{(t+2a)^2+(3t)^2-(2t+2a)^2}{2\times(t+2a)\times 3t}\Rightarrow 3t^2-10at=0\Rightarrow t=$

$\frac{10}{3}a$，代入①式得 $c=\frac{7}{3}a$.点 M 为线段 AF_2 的中点，所以 $|AM|=|MF_2|=\frac{10}{3}a$，因为 $\cos AMF_1+\cos F_2MF_1=0$，所以 $\frac{\left(\frac{10}{3}a\right)^2+|F_1M|^2-\left(\frac{26}{3}a\right)^2}{2\times\frac{10}{3}a\times|F_1M|}+\frac{\left(\frac{10}{3}a\right)^2+|F_1M|^2-\left(\frac{14}{3}a\right)^2}{2\times\frac{10}{3}a\times|F_1M|}=0\Rightarrow|F_1M|=\frac{4\sqrt{21}}{3}a$，又因为 $|F_1F_2|=\frac{14}{3}a$，所以 $\frac{|F_1M|}{|F_1F_2|}=\frac{\frac{4\sqrt{21}}{3}a}{\frac{14}{3}a}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$，故选B.



12. B　**解析**：$4a=4\log_6 4=\log_6 4^4>\log_6 6^3=3$，$4b=4\log_9 5=\log_9 5^4<\log_9 9^3=3$，
$4c=4\log_{12}8=\log_{12}8^4>\log_{12}12^3=3$，所以 $b<a$，$b<c$.
$5a=5\log_6 4=\log_6 4^5<\log_6 6^4=4$，$5c=5\log_{12}8=\log_{12}8^5>\log_{12}12^4=4$，所以 $a<c$.
综上，$b<a<c$，故选B.

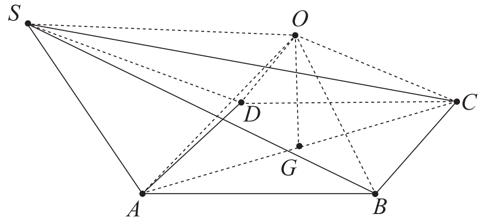
13. 1　**解析**：如图所示，x，y 满足的平面区域如图中阴影所示，令 $z=y-2x$，即直线 $y=2x+z$ 经过点 $(0,1)$ 时，z 最大，且 $z_{\max}=1$，即 $y-2x$ 的最大值为1.



14. -44　**解析**：$(x^3-x+1)^6$ 就是6个 (x^3-x+1) 相乘，
0个 x^3，6个 $-x$，即 $(-1)^6x^6=x^6$；
1个 x^3，3个 $-x$，即 $C_6^1x^3\cdot C_5^3(-x)^3=-60x^6$；
2个 x^3，0个 $-x$，即 $C_6^2(x^3)^2=15x^6$；
所以 x^6 的系数为：$1-60+15=-44$.

15. 18π　**解析**：如图，四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，平面 $SAC\perp$ 平面 $ABCD$，所以四棱锥 $S-ABCD$ 外接球的球心是 ΔABC 外接圆的圆心 O，因为 $\cos\angle SAC=-\frac{1}{3}$，所以 $\sin\angle SAC=$

$\frac{2\sqrt{2}}{3}$，则 $\frac{SC}{\sin\angle SAC}=\frac{4}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=2R\Rightarrow R=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，所以 $S=4\pi R^2=4\pi\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2=18\pi$.



16. ①③④ **解析**：因为 $f(x)=e^{\cos x}-\frac{1}{e^{\cos x}}$，$f(-x)=e^{\cos(-x)}-\frac{1}{e^{\cos(-x)}}=e^{\cos x}-\frac{1}{e^{\cos x}}=f(-x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，图象关于 y 轴对称，故①正确；$f(2\pi-x)=e^{\cos(2\pi-x)}-\frac{1}{e^{\cos(2\pi-x)}}=e^{\cos x}-\frac{1}{e^{\cos x}}=f(x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于 $x=\pi$ 对称，故②错误；令 $t=\cos x\in[-1,1]$，则 $y=e^t-\frac{1}{e^t}$ 在 $t\in[-1,1]$ 上单调递增，所以 $y_{\min}=\frac{1}{e}-e$，即 $f(x)$ 的最小值是 $\frac{1}{e}-e$，故③正确；令 $t=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递减，$y=e^t-\frac{1}{e^t}$ 在 $t\in[-1,1]$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递减，故④正确；则所有真命题的序号是①③④.

17.（12分）解：（1）因为 $a_{n+1}=2a_n+3n-3$，所以 $a_{n+1}+3(n+1)=2a_n+6n=2(a_n+3n)$，又因为 $a_1=-2$，则 $a_1+3=1\neq0$，$\frac{a_{n+1}+3(n+1)}{a_n+3n}=2$，所以数列 $\{a_n+3n\}$ 为等比数列；…… 4分

（2）由（1）得 $a_n+3n=(a_1+3)\times2^{n-1}=2^{n-1}$，则 $a_n=2^{n-1}-3n$，

$S_n=\frac{1-2^n}{1-2}-\frac{3n(n+1)}{2}=2^n-1-\frac{3n(n+1)}{2}$，…………………………………………… 6分

则 $T_n=S_n+\frac{3}{2}n^2-\frac{13}{2}n=2^n-1-\frac{3n(n+1)}{2}+\frac{3}{2}n^2-\frac{13}{2}n=2^n-1-8n$，

当 $n\geqslant2$ 时，$T_n-T_{n-1}=(2^n-1-8n)-[2^{n-1}-1-8(n-1)]=2^{n-1}-8$，…………………… 8分

所以当 $n\geqslant5$ 且 $n\in N^*$ 时，$T_n-T_{n-1}=2^{n-1}-8>0$，即 $T_n>T_{n-1}$，则 $T_4<T_5<T_6<\cdots\cdots$；

当 $n=4$ 时，$T_4-T_3=2^3-8=0$，即 $T_4=T_3$；

当 $2\leqslant n\leqslant3$ 且 $n\in N^*$ 时，$T_n-T_{n-1}=2^{n-1}-8<0$，即 $T_n<T_{n-1}$，则 $T_3<T_2<T_1$.

综上，$(T_n)_{\min}=T_3=T_4=-17$，即 T_n 的最小值为 -17. …………………………………………… 12分

18.（12分）解：（1）因为甲在50米，100米，150米处击中目标的概率分别为 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$，所以甲命中目标的概率为 $P_1=\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{6}=\frac{13}{18}$；…………………… 2分

因为乙在50米，100米，150米处击中目标的概率分别为 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$. 所以乙命中目标的概率为 $P_2=\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{4}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{5}=\frac{7}{10}$. …………………………………………… 4分

则甲，乙两人中恰有一人命中目标的概率为 $P=\frac{13}{18}\times\left(1-\frac{7}{10}\right)+\left(1-\frac{13}{18}\right)\times\frac{7}{10}=\frac{37}{90}$. …… 6分

（2）X 的取值为：0，2，4.

$P(X=0)=\left(1-\frac{13}{18}\right)\times\left(1-\frac{7}{10}\right)=\frac{1}{12}$；$P(X=2)=\frac{13}{18}\times\left(1-\frac{7}{10}\right)+\left(1-\frac{13}{18}\right)\times\frac{7}{10}=\frac{37}{90}$；

$P(X=4)=\frac{13}{18}\times\frac{7}{10}=\frac{91}{180}$. …………………………………………………………… 9分

则 X 的分布列为：

X	0	2	4
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{37}{90}$	$\frac{91}{180}$

则 $EX = 0 \times \frac{1}{12} + 2 \times \frac{37}{90} + 4 \times \frac{91}{180} = \frac{128}{45}$. ………………………………………………………… 12分

19.（12分）解：（1）如图，取 AC 的中点 E，连接 A_1E，BE，

因为 $AA_1 = BA_1 = CA_1 = AC = 2$，所以 $A_1E \perp AC$，

$A_1E = \sqrt{AA_1{}^2 - AE^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

又因为 $\angle ABC = 90°$，所以 $BE = \frac{1}{2}AC = 1$.

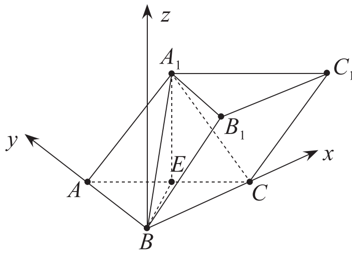
所以 $A_1E^2 + BE^2 = A_1B^2$，则 $A_1E \perp BE$，

又因为 $AC \cap BE = E$，所以 $A_1E \perp$ 平面 ABC，所以直线 A_1B 与平面 ABC 所成角为 $\angle A_1BE$，在直角 ΔA_1BE 中，$\tan\angle A_1BE = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \angle A_1BE = 60°$，则直线 A_1B 与平面 ABC 所成的角为 $60°$.

………………………………………………………………………………… 5分

（2）以 B 为坐标原点，$\overrightarrow{BA}$ 的方向为 x 轴正方向，$\overrightarrow{BC}$ 的方向为 y 轴正方向，垂直于平面 ABC 向上的方向为 z 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系．因为 $AC = 2$，$AB = 1$，$\angle ABC = 90°$，所以 $BC = \sqrt{3}$，由（1）得，$B(0, 0, 0)$，$C(\sqrt{3}, 0, 0)$，$A(0, 1, 0)$，$A_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$，

则 $\overrightarrow{BC} = (\sqrt{3}, 0, 0)$，$\overrightarrow{BA} = (0, 1, 0)$，$\overrightarrow{BA_1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$. ……………………………… 6分



设平面 AA_1B 的法向量为 $\overrightarrow{n_1} = (x_1, y_1, z_1)$，

$$\begin{cases} \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{n_1} = y_1 = 0 \\ \overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{n_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_1 + \sqrt{3}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_1} = \left(2\sqrt{3}, 0, -\sqrt{3}\right).$$

………………………………………………………………………… 8分

设平面 CA_1B 的法向量为 $\overrightarrow{n_2} = (x_2, y_2, z_2)$，

$$\begin{cases} \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{n_2} = \sqrt{3}x_2 = 0 \\ \overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{n_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_2 + \sqrt{3}z_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_1} = (0, 2\sqrt{3}, -1).$$ ……………………………… 10分

设二面角 $A - A_1B - C$ 的平面角为 θ，则 $|\cos\theta| = \left|\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}\right| = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12 + \sqrt{3}^2}\sqrt{12 + 1^2}} = \frac{\sqrt{65}}{65}$,

所以 $\sin\theta = \sqrt{1 - (\frac{\sqrt{65}}{65})^2} = \frac{8\sqrt{65}}{65}$，则二面角 $A - A_1B - C$ 的正弦值为 $\frac{8\sqrt{65}}{65}$. ………… 12分

20.（12分）解：（1）因为椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 过点 $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$，所以 $\frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1$，点 $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 与圆 $x^2 + \left(y - \frac{a+3}{2}\right)^2 = 1$ 上点 M 的距离的最大值为 $\sqrt{(1-0)^2 + (\frac{3}{2} - \frac{a+3}{2})^2} + 1 = \sqrt{2} + 1$，解得 $a = 2$，$b = \sqrt{3}$，则椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. ……………………………… 4分

（2）当直线 l 斜率存在时，设直线 l：$y = kx + m$，

$$\begin{cases} y = kx + m \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases} \Rightarrow (3 + 4k^2)x^2 + 8kmx + (4m^2 - 12) = 0,$$

设点$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-8km}{3+4k^2}, \\ x_1x_2=\dfrac{4m^2-12}{3+4k^2} \end{cases}$ ………………………………………… 6分

$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=\left(x_1, y_1-\dfrac{2}{3}\right)\cdot\left(x_2, y_2-\dfrac{2}{3}\right)=x_1x_2+\left(y_1-\dfrac{2}{3}\right)\left(y_2-\dfrac{2}{3}\right)$

$=x_1x_2+\left(kx_1+m-\dfrac{2}{3}\right)\left(kx_2+m-\dfrac{2}{3}\right)=(1+k^2)x_1x_2+\left(km-\dfrac{2}{3}k\right)(x_1+x_2)+\left(m-\dfrac{2}{3}\right)^2$

$(1+k^2)\dfrac{4m^2-12}{3+4k^2}+\left(km-\dfrac{2}{3}k\right)\dfrac{-8km}{3+4k^2}+\left(m-\dfrac{2}{3}\right)^2=-\dfrac{23}{9}$ ………………………………… 8分

所以$7m^2-4m-3=0\Rightarrow m=1$或$m=-\dfrac{3}{7}$.…………………………………………………………… 10分

则直线l：$y=kx+1$或l：$y=kx-\dfrac{3}{7}$，因为l不过$(0, 1)$，则直线l：$y=kx-\dfrac{3}{7}$，即直线l过定点$\left(0, -\dfrac{3}{7}\right)$.

当直线l斜率不存在时，设直线l：$x=t$，不妨设$A\left(t, \sqrt{3-\dfrac{3}{4}t^2}\right)$，$B\left(t, -\sqrt{3-\dfrac{3}{4}t^2}\right)$，

所 以 $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=\left(t, \sqrt{3-\dfrac{3}{4}t^2}-\dfrac{2}{3}\right)\cdot\left(t, -\sqrt{3-\dfrac{3}{4}t^2}-\dfrac{2}{3}\right)=t^2+\dfrac{4}{9}-\left(3-\dfrac{3}{4}t^2\right)=\dfrac{7}{4}t^2-\dfrac{23}{9}=-\dfrac{23}{9}$，所以$t=0$，直线$l$：$x=0$，此时$l$过点$(0, 1)$，不满足题意.

综上，直线l过定点$\left(0, -\dfrac{3}{7}\right)$.…………………………………………………………………… 12分

21.（12分）解：（1）因为$f(x)=x\ln x-3x+4\ln(x+1)$，$f'(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}$，

$f''(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{(x+1)^2}=\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}\geqslant 0$，所以$f'(x)$在$(0, +\infty)$上单调递增，又因为$f'(1)=0$，

所以，当$x\in(0, 1)$时，$f'(x)<f'(1)=0$，$f(x)$单调递减；当$x\in(1, +\infty)$时，$f'(x)>f'(1)=0$，$f(x)$单调递增；所以$f(x)_{\min}=f(1)=4\ln 2-3$，则$f(x)$的最小值为$4\ln 2-3$，则$M=4\ln 2-3$. ……………………………………………………………………………………… 4分

（2）$g_{2022}(x)=g_{2021}(x)+g_{2021}\left(\dfrac{1}{x}\right)=2\left[g_{2020}(x)+g_{2020}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]=2^2\left[g_{2019}(x)+g_{2019}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]=\cdots$

$=2^{2020}\left[g_1(x)+g_1\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]=2^{2021}\left[f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]$. ………………………………………… 6分

设函数$h(x)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，

$h'(x)=f'(x)-\dfrac{1}{x^2}f'\left(\dfrac{1}{x}\right)=\left[\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}\right]-\dfrac{1}{x^2}\left[\ln\dfrac{1}{x}-\dfrac{2\left(\dfrac{1}{x}-1\right)}{\dfrac{1}{x}+1}\right]=\left[\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}\right]+\dfrac{1}{x^2}\left[\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}\right]=\dfrac{(x^2+1)}{x^2}\left[\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}\right]$， ……………………………………… 8分

令$\varphi(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}$，$\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{(x+1)^2}=\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}\geqslant 0$，所以$\varphi(x)$在$(0, +\infty)$上单调递增，又因为$\varphi(1)=0$，所以，当$x\in(0, 1)$时，$\varphi(x)<\varphi(1)=0$，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减；当$x\in(1, +\infty)$时，$\varphi(x)>\varphi(1)=0$，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增. 所以$h(x)_{\min}=h(1)=$

$2f(1)=2(4\ln 2-3)$， ………………………………………………………………………… 10分

则 $g_{2022}(x)_{\min}=2^{2021}h(x)_{\min}=2^{2022}(4\ln 2-3)$，则 $\dfrac{N}{M}=\dfrac{2^{2022}(4\ln 2-3)}{4\ln 2-3}=2^{2022}$，$\log_2\dfrac{N}{M}=2022$.

……………………………………………………………………………………… 2分

22. [选修4-4：坐标系与参数方程]（10分）

解：（1）因为 $A(-2,0)$，$B(1,0)$，动点 $P(x,y)$ 满足 $|PA|=2|PB|$，

所以 $\sqrt{(x+2)^2+y^2}=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$，整理得曲线 C 的方程为 $(x-2)^2+y^2=4$，则曲线 C 的一个参数方程为 $\begin{cases}x=2+2\cos\theta\\ y=2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）； ………………………………………… 5分

（2）因为 $|PA|=2|PB|$，所以 $|PA|\cdot|PB|=\dfrac{1}{2}|PA|^2=\dfrac{1}{2}[(2+2\cos\theta+2)^2+(2\sin\theta)^2]$，

则 $|PA|\cdot|PB|=\dfrac{1}{2}|PA|^2=\dfrac{1}{2}(20+16\cos\theta)=10+8\cos\theta\in[2,18]$，

所以 $|PA|\cdot|PB|$ 的取值范围为 $[2,18]$. ………………………………………………………… 10分

23. [选修4-5：不等式选讲]（10分）

解：（1）当 $a=0$ 时，不等式 $f(x)\leqslant 4$ 化简为 $|x^2-3|+|x^2-1|\leqslant 4$，令 $t=x^2\in[0,+\infty)$，

则 $|t-3|+|t-1|\leqslant 4$，当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，$4-2t\leqslant 4\Rightarrow t\geqslant 0$，则 $0\leqslant t\leqslant 1$；

当 $1<t<3$ 时，$2\leqslant 4$ 恒成立，则 $1<t<3$；

当 $t\geqslant 3$ 时，$2t-4\leqslant 4\Rightarrow t\leqslant 4$ 恒成立，则 $3\leqslant t\leqslant 4$.

综上，$0\leqslant t\leqslant 4$，即 $0\leqslant x^2\leqslant 4$，解得 $-2\leqslant x\leqslant 2$，所以解集为 $\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$. ……………… 5分

（2）$f(x)=|x^2-3a^2-3|+|x^2-a-1|\geqslant 2$ 恒成立，

因为 $f(x)=|x^2-3a^2-3|+|x^2-a-1|=|3a^2+3-x^2|+|x^2-a-1|\geqslant|3a^2-a+2|=3a^2-a+2$.

即 $3a^2-a+2\geqslant 2$，解得 $a\leqslant 0$ 或 $a\geqslant\dfrac{1}{3}$. ………………………………………………… 10分