高三数学试题参考答案

一、选择题(本题共 8 个小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合要求的.)

1. A 2. D 3. C 4. D 5. A 6. C 7. B 8. D

二、多项选择题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.)

9. AC 10. BCD 11. ACD 12. BCD

三、填空题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

13. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 14. 1024 15. $(-27,5)$ 16. $\frac{1}{6}$ $2-\frac{n+2}{2^n}$

四、解答题(本题共 6 小题,共 70 分,解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. 解:(1)因为 $\tan B+\tan C=\frac{\sqrt{2}\sin A}{\cos C}$,所以 $\frac{\sin B}{\cos B}+\frac{\sin C}{\cos C}=\frac{\sqrt{2}\sin A}{\cos C}$

即 $\sin B\cos C+\cos B\sin C=\sqrt{2}\sin A\cos B$,

故 $\sin(B+C)=\sqrt{2}\sin A\cos B$ ……………………………… 2 分

因为 $A+B+C=\pi$,所以 $\sin A=\sqrt{2}\sin A\cos B$

又 $\sin A\neq 0$,所以 $\cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}$,因为 $0<B<\pi$,所以 $B=\frac{\pi}{4}$ ……………………………… 3 分

由正弦定理得 $\frac{b}{\sin B}=2R$,则 $b=2\times 2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=4$. ……………………………… 5 分

(2)由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,得 $4^2=a^2+c^2-\sqrt{2}ac$

由基本不等式得 $16=a^2+c^2-\sqrt{2}ac\geqslant 2ac-\sqrt{2}ac$, ……………………………… 6 分

当且仅当 $a=c$ 时取等号,

所以 $ac\leqslant\frac{16}{2-\sqrt{2}}=8(2+\sqrt{2})$, ……………………………… 8 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{2}}{4}ac\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4}\times 8(2+\sqrt{2})=4+4\sqrt{2}$

故△ABC 面积的最大值为 $4+4\sqrt{2}$ ……………………………… 9 分

由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot h$ 可得,AC 边上高的最大值为 $2+2\sqrt{2}$ ……………………………… 10 分

18. 解：(1)$a_n\cdot a_{n+1}=16^n$ ①，$a_{n+1}a_{n+2}=16^{n+1}$ ②，$\frac{②}{①}$得，$\frac{a_{n+2}}{a_n}=16$ ………………………… 2 分

设$\{a_n\}$的公比为 q，则 $q^2=16$，因为 $q>0$，所以 $q=4$ ………………………… 3 分

又 $a_1\cdot a_2=a_1^2\cdot q=16$　所以 $a_1=2$ ………………………… 4 分

$a_n=a_1q^{n-1}=2^{2n-1}$ ………………………… 5 分

(2)当 n 为奇数时，$b_{n+1}=2^{2n-1}$，当 n 为偶数时，$b_{n+1}+b_n=n$ ………………………… 7 分

则 $S_{2n}=b_1+(b_2+b_3)+(b_4+b_5)+\cdots+(b_{2n-2}+b_{2n-1})+b_{2n}$ ………………………… 8 分

$=1+[2+4+\cdots+(2n-2)]+2^{4n-3}$ ………………………… 10 分

$=1+\frac{[2+(2n-2)](n-1)}{2}+2^{4n-3}$

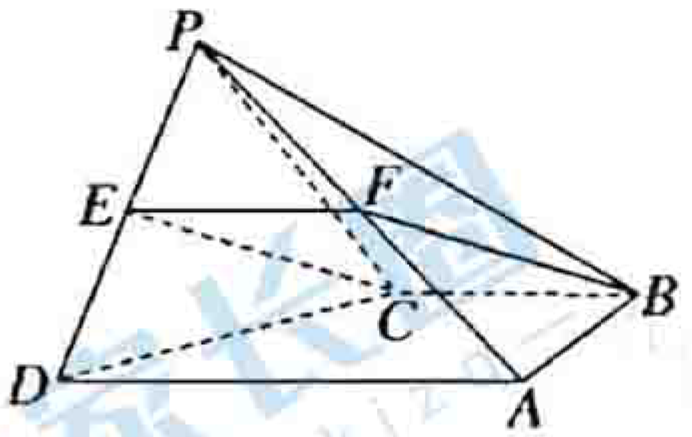
$=2^{4n-3}+n^2-n+1$ ………………………… 12 分

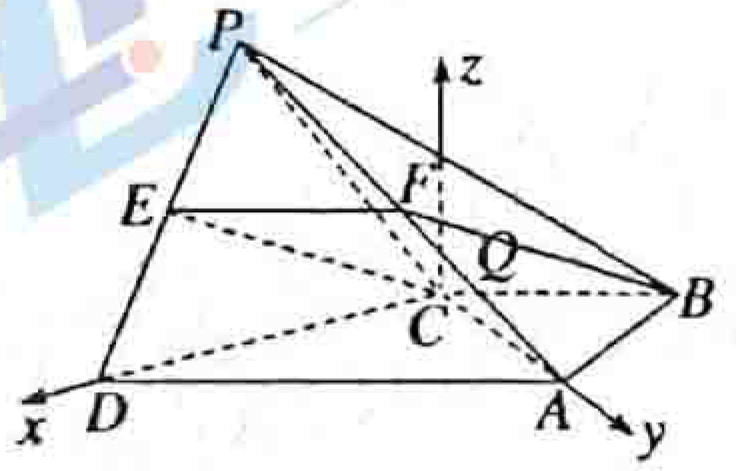
19. (1)证明：取 PA 中点 F，连接 EF、BF ………………………… 1 分

因为 E 为 PD 中点，则 $EF//AD$ 且 $EF=\frac{1}{2}AD$，又 $BC//AD$ 且 $BC=\frac{1}{2}AD$，

因此 $EF//BC$ 且 $EF=BC$，则四边形 $EFBC$ 是平行四边形，………………………… 3 分

所以 $CE//BF$，又 $CE\not\subset$面 PAB，$BF\subset$面 PAB，所以 $CE//$面 PAB. ………………………… 5 分





(2)解：因为$\angle BAD=90°$，$AD//CB$，所以$\angle ABC=90°$.

又 $BC=AB=2$，故 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=2\sqrt{2}$，$\angle CAD=45°$，又 $AD=4$，

由余弦定理可得 $CD=2\sqrt{2}$，所以$\angle ACD=90°$. ………………………… 7 分

以 C 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $C(0,0,0)$，$A(0,2\sqrt{2},0)$，$D(2\sqrt{2},0,0)$，

$P(\sqrt{2},0,\sqrt{6})$，$\overrightarrow{CD}=(2\sqrt{2},0,0)$，$\overrightarrow{CP}=(\sqrt{2},0,\sqrt{6})$，$\overrightarrow{PA}=(-\sqrt{2},2\sqrt{2},-\sqrt{6})$，………………………… 8 分

由 $\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{PA}(0<\lambda<1)$，得 $\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{CP}+\lambda\overrightarrow{PA}=(\sqrt{2}(1-\lambda),2\sqrt{2}\lambda,\sqrt{6}(1-\lambda))$，

………………………… 9 分

令 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$是平面 CDQ 的一个法向量，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CQ}=0\end{cases}$

即$\begin{cases}2\sqrt{2}x=0\\ \sqrt{2}(1-\lambda)\cdot x-2\sqrt{2}\lambda\cdot y+\sqrt{6}(1-\lambda)\cdot z=0\end{cases}$，

令 $y=1$，有 $\boldsymbol{n}=\left(0,1,\dfrac{2\sqrt{2}\lambda}{\sqrt{6}(\lambda-1)}\right)$， …………………………………………………… 10 分

取面 PCD 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$，由

$$|\cos\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{8\lambda^2}{6(\lambda-1)^2}}}=\frac{\sqrt{13}}{13}$$，解得 $\lambda=\dfrac{3}{4}$ 或 $\lambda=\dfrac{3}{2}$（舍）. …… 12 分

注：此题法向量赋值可参考下面方法. 计算较简：

$$2\sqrt{2}\lambda y+\sqrt{6}(1-\lambda)z=0,\ y=\frac{\sqrt{6}(\lambda-1)z}{2\sqrt{2}\lambda}=\frac{\sqrt{3}(\lambda-1)z}{2\lambda}$$

取 $z=2\lambda$，则 $y=\sqrt{3}(\lambda-1)$，从而 $\boldsymbol{n}=(0,\sqrt{3}(\lambda-1),2\lambda)$

20. 解：(1) 设事件 A：在三次中只有 1 次拿到黄球

事件 B：三次中至多一次抽到红球

则事件 AB：在三次中只有 1 次抽到黄球，其他两次至多一次抽到红球

$P(A)=\dfrac{3\times3\times7\times6}{10\times9\times8}=\dfrac{21}{40}$ …………………………………………………… 1 分

$P(AB)=\dfrac{(3\times3\times5\times4)+3\times2\times5\times2\times3}{10\times9\times8}=\dfrac{1}{2}$ …………………………………… 3 分

所以 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{20}{21}$ …………………………………………………… 4 分

(2) 拿到红球的次数 X 为 0，1，2，则 …………………………………………………… 5 分

$P(X=0)=\dfrac{8\times7\times6}{10\times9\times8}=\dfrac{7}{15}$ …………………………………………………… 6 分

$P(X=1)=\dfrac{2\times8\times7\times3}{10\times9\times8}=\dfrac{7}{15}$ …………………………………………………… 7 分

$P(X=2)=\dfrac{2\times8\times3}{10\times9\times8}=\dfrac{1}{15}$ …………………………………………………… 8 分

故 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\dfrac{7}{15}$	$\dfrac{7}{15}$	$\dfrac{1}{15}$

（有无表格均不扣分）

设事件 C=“拿到红球的个数比黄球的个数多”

C_1：2 红 1 黄　$P(C_1)=\dfrac{2\times3\times3}{10\times9\times8}=\dfrac{1}{40}$ …………………………………………………… 9 分

C_2:2 红 1 绿　$P(C_2)=\dfrac{2\times5\times3}{10\times9\times8}=\dfrac{1}{24}$ …………………………………… 10 分

C_3:1 红 2 绿　$P(C_3)=\dfrac{2\times5\times4\times3}{10\times9\times8}=\dfrac{1}{6}$ …………………………………… 11 分

$P(C)=P(C_1)+P(C_2)+P(C_3)=\dfrac{1}{40}+\dfrac{1}{24}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{7}{30}$ …………………………………… 12 分

21. 解:(1)①抛物线的准线为 $x=-\dfrac{p}{2}$,当 MD 与 x 轴垂直时,点 M 的横坐标为 p,

此时 $|MF|=p+\dfrac{p}{2}=3$. …………………………………… 1 分

所以 $p=2$,所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$; …………………………………… 2 分

②设直线方程为 $x=my+1$,$M(x_M,y_M)$、$N(x_N,y_N)$

由 $\begin{cases}y^2=4x,\\x=my+1,\end{cases}$ 可得 $y^2-4my-4=0$ …………………………………… 3 分

$y_M+y_N=4m$,　$y_My_N=-4$.

由 $\dfrac{|MF|}{|FN|}=\dfrac{1}{4}$ 得 $\dfrac{y_M}{-y_N}=\dfrac{1}{4}$.

解得 $y_M=1,y_N=-4$.　从而 $m=-\dfrac{3}{4}$. …………………………………… 4 分

$$\begin{aligned}|MN|&=x_M+x_N+p\\&=m(y_M+y_N)+2+p\\&=\frac{25}{4}.\end{aligned}$$ …………………………………… 5 分

(2)由①②⇒③.

由题意:设直线 AB 为:$x=ky+n$

且 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$

由 $\begin{cases}y^2=4x\\x=ky+n\end{cases}\Rightarrow y^2-4ky-4n=0$

所以 $y_1+y_2=4k$　$y_1y_2=-4n$　(*) …………………………………… 6 分

$k_1=\dfrac{y_1-2t}{x_1-t^2}=\dfrac{y_1-2t}{\dfrac{y_1^2}{4}-t^2}=\dfrac{4}{y_1+2t}$

同理 $k_2=\dfrac{4}{y_2+2t}$ …………………………………… 8 分

$k_1+k_2=\dfrac{4}{y_1+2t}+\dfrac{4}{y_2+2t}=\dfrac{2}{t}$

所以$\dfrac{2(y_1+y_2)+8t}{y_1y_2+2t(y_1+y_2)+4t^2}=\dfrac{1}{t}$

将(*)代入上式整理得：

$n=-t^2$ ………………………………………………………………………………………… 10 分

所以直线 AB 为 $x=ky-t^2$

即 $ky=x+t^2$

所以直线 AB 经过点$(-t^2,0)$. ……………………………………………………… 12 分

选择由①③⇒②.

由题意直线 AB 为：$x=ky-t^2$

且 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

由$\begin{cases}x=ky-t^2\\y^2=4x\end{cases}\Rightarrow y^2-4ky+4t^2=0$

所以 $y_1+y_2=4k$，$y_1y_2=4t^2$ ……………………………………………………… 6 分

$k_1=\dfrac{y_1-2t}{x_1-t^2}=\dfrac{y_1-2t}{\dfrac{y_1^2}{4}-t^2}=\dfrac{4}{y_1+2t}$

同理 $k_2=\dfrac{4}{y_2+2t}$ ……………………………………………………………… 8 分

$$\begin{aligned}所以\ k_1+k_2&=\frac{4}{y_1+2t}+\frac{4}{y_2+2t}\\&=\frac{4(y_1+y_2)+16t}{y_1y_2+2t(y_1+y_2)+4t^2}\\&=\frac{16k+16t}{8t^2+8kt}\\&=\frac{2(k+t)}{t(k+t)}=\frac{2}{t}.\end{aligned}$$

（第二步处 10 分，最后一步处 12 分）

选择②③⇒①

由题意直线 AB 为：$x=ky-t^2$

且 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x_0^2,2x_0)$

由$\begin{cases}x=ky-t^2\\y^2=4x\end{cases}\Rightarrow y^2-4ky+4t^2=0$

所以 $y_1+y_2=4k$，$y_1y_2=4t^2$ (*) ……………………………………………… 6 分

$k_1=\dfrac{y_1-2x_0}{x_1-x_0^2}=\dfrac{y_1-2x_0}{\dfrac{y_1^2}{4}-x_0^2}=\dfrac{4}{y_1+2x_0}$

同理：$k_2=\dfrac{4}{y_2+2x_0}$ ………………………………………………………… 8 分

所以 $k_1+k_2=\dfrac{4}{y_1+2x_0}+\dfrac{4}{y_2+2x_0}=\dfrac{4(y_1+y_2)+16x_0}{y_1y_2+2x_0(y_1+y_2)+4x_0^2}$

所以$\dfrac{2(y_1+y_2)+8x_0}{y_1y_2+2x_0(y_1+y_2)+4x_0^2}=\dfrac{1}{t}$ ………………………………………… 10 分

将(＊)代入上式整理得:$(t-x_0)(t-x_0-2k)=0$(＊＊)

且(＊＊)式对任意的 k 值成立

所以 $t-x_0=0$

所以 $P(t^2,2t)$. ………………………………………… 12 分

22. 解:(1)由已知,$f'(x)=e^{x-1}\ln x+(e^{x-1}-1)\dfrac{1}{x}$, ………………………… 1 分

$f'(1)=0$,$f(1)=0$,所以切线方程为 $y=0$ ………………………… 2 分

(2)因为 $f'(x)=e^{x-1}\ln x+(e^{x-1}-1)\dfrac{1}{x}$

所以当 $x>1$ 时,$e^{x-1}\ln x>0$,$(e^{x-1}-1)\dfrac{1}{x}>0$,此时 $f'(x)>0$, ………………… 3 分

当 $0<x<1$ 时,$e^{x-1}\ln x<0$,$(e^{x-1}-1)\dfrac{1}{x}<0$,此时 $f'(x)<0$, ………………… 4 分

所以 $f(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增 ………………… 5 分

(3)当 $x>1$ 时,因为 $f(x)=(e^{x-1}-1)\ln x>k(x-1)^2$ 恒成立,

所以$\dfrac{e^{x-1}-1}{x-1}>\dfrac{k(x-1)}{\ln x}=\dfrac{k[e^{\ln x}-1]}{\ln x}$恒成立. ………………… 7 分

令 $g(x)=\dfrac{e^{x-1}-1}{x-1}$,则 $g(x)>k\cdot g(\ln x+1)$对 $x>1$ 恒成立,

$g'(x)=\dfrac{xe^{x-1}-2e^{x-1}+1}{(x-1)^2}$,记$h(x)=xe^{x-1}-2e^{x-1}+1$, $x>1$,则$h'(x)=(x-1)e^{x-1}>0$,

所以 $h(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增,

所以 $h(x)>h(1)=0$,所以 $g'(x)>0$

所以 $g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增,………………………………… 9 分

又因为当 $x>1$ 时,$x>\ln x+1$,

且当 $x=1$ 时,$x=\ln x+1=1$.

所以 $g(x)>g(\ln x+1)>0$

所以$\dfrac{g(x)}{g(\ln x+1)}>1$ ………………………………………… 11 分

所以 $k<\dfrac{g(x)}{g(\ln x+1)}$对 $x\in(1,+\infty)$恒成立,

所以 $k\leqslant 1$. ………………………………………… 12 分