高三数学参考答案、提示及评分细则

1. D　$A=\{x|3^x>9\}=\{x|x>2\}$，故 $\complement_U A=\{x|x\leqslant 2\}$，所以 $(\complement_U A)\cap B=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}=[-2,2]$. 故选 D.

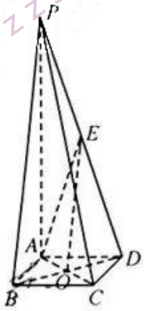
2. C　$\frac{-3i}{1+i}=\frac{-3i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-3i+3i^2}{2}=-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i$，故 $\frac{-3i}{1+i}$ 对应的点为 $\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$，位于第三象限. 故选 C.

3. A　由表中数据可得 $\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$，$\bar{y}=\frac{0.5+0.6+1+1.4+1.5}{5}=1$，将 $(3,1)$ 代入 $\hat{y}=bx+0.16$，即 $1=b\times 3+0.16$，解得 $b=0.28$. 故选 A. 来源：高三答案公众号

4. A　由 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$，得 $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha-\cos\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{4}$，所以 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{2}$，所以 $1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}$，所以 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{8}$，所以 $\frac{\sin\alpha}{1-\tan\alpha}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{\frac{3}{8}}{-\frac{1}{2}}=-\frac{3}{4}$. 故选 A.

5. B　因为 $\left(2x-\frac{y^2}{x}\right)(x+y)^5=2x(x+y)^5-\frac{y^2}{x}(x+y)^5$，$2x(x+y)^5$ 的展开式通项为 $T_{k+1}=2xC_5^k\cdot x^{5-k}\cdot y^k=2C_5^k\cdot x^{6-k}\cdot y^k$，$\frac{y^2}{x}(x+y)^5$ 的展开式通项为 $S_{r+1}=\frac{y^2}{x}C_5^r\cdot x^{5-r}\cdot y^r=C_5^r\cdot x^{4-r}\cdot y^{r+2}$，由 $\begin{cases}6-k=3,\\4-r=3,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}k=3,\\r=1,\end{cases}$ 因此 $\left(2x-\frac{y^2}{x}\right)(x+y)^5$ 的展开式中，x^3y^3 的系数为 $2C_5^3-C_5^1=15$. 故选 B.

6. C　$f(x)=2\cos^2\frac{\omega x}{2}+\sqrt{3}\sin\omega x-1=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，令 $f(x)=0$，$\omega x+\frac{\pi}{6}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，$x=\frac{k\pi}{\omega}-\frac{\pi}{6\omega}(k\in\mathbf{Z})$. 又函数 $f(x)$ 在区间 $(\pi,2\pi)$ 内没有零点，所以 $\begin{cases}\frac{k\pi}{\omega}-\frac{\pi}{6\omega}\leqslant\pi,\\\frac{(k+1)\pi}{\omega}-\frac{\pi}{6\omega}\geqslant 2\pi,\end{cases}$ 解得 $k-\frac{1}{6}\leqslant\omega\leqslant\frac{k+1}{2}-\frac{1}{12}(k\in\mathbf{Z})$，$\omega>0$，所以 $k=0$，$0<\omega\leqslant\frac{5}{12}$，$k=1$，$\frac{5}{6}\leqslant\omega\leqslant\frac{11}{12}$，所以 ω 的最大值是 $\frac{11}{12}$. 故选 C.



7. D　连接 BD 交 AC 于点 O，取 PD 的中点 E，连接 EO，EA. 不妨设 $AB=1$. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 O 是 BD 的中点，又 E 是 PD 的中点，所以 $OE\parallel PB$. 所以直线 PB 与直线 AC 所成角即为 $\angle EOA$（或其补角）. 因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，又 AB，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AB$，$PA\perp AD$. 在 $\triangle PAD$ 中，$PA\perp AD$，$PA=3$，$AD=1$，所以 $AE=\frac{\sqrt{10}}{2}$；在 $\triangle PAB$ 中，$PA\perp AB$，$PA=3$，$AB=1$，所以 $PB=\sqrt{10}$，所以 $EO=\frac{\sqrt{10}}{2}$；在 $\triangle AOE$ 中，$AE=\frac{\sqrt{10}}{2}$，$AO=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$EO=\frac{\sqrt{10}}{2}$，所以 $\cos\angle AOE=\frac{AO^2+OE^2-AE^2}{2\cdot AO\cdot OE}=\frac{\sqrt{5}}{10}$，即直线 PB 与直线 AC 所成角的余弦值是 $\frac{\sqrt{5}}{10}$. 故选 D.

8. B　令 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，令 $u(x)=x\cos x-\sin x$，则 $u'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x<0$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上恒成立，所以 $u(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，所以 $u(x)<u(0)=0$，所以 $f'(x)<0$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上恒成立，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，所以 $f(1)>f\left(\frac{\pi}{3}\right)$，即 $\frac{\sin 1}{1}>\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}}$，即 $\frac{\sin 1}{3}>\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$. 令 $g(x)=\sin x+x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，易得 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，所以 $g(1)<g\left(\frac{\pi}{3}\right)$，即 $\sin 1+1<\sin\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}$，即 $\sin 1<\frac{\pi}{3}-\frac{2-\sqrt{3}}{2}$，所以 $\frac{\sin 1}{3}<\frac{\pi}{9}-\frac{2-\sqrt{3}}{6}$，所以 $c>a>b$. 故选 B.

9. BD　由不等式的基本性质，可得 A 错误，B 正确；取 $a=\frac{1}{4}$，$b=\frac{1}{2}$，则 $a+b=\frac{3}{4}\in(0,1)$，从而 $\left(\frac{3}{4}\right)^{c}<\left(\frac{3}{4}\right)^{d}$，则 C 错误；因为 $a+b>0$，所以幂函数 $y=x^{a+b}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，则由 $c>d>0$，即得 $c^{a+b}>d^{a+b}$，则 D 正确．故选 BD．

10. ABD　据题设分析知，$0<r<\sqrt{13}$，$|AB|=2$，当 $r=3$ 时，直线 AB 与圆 C 相切．∵$AP\perp BP$，∴点 P 在以线段 AB 为直径的圆上．又 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，∴点 P 在圆 $x^2+y^2=1$ 上．又∵点 P 在圆 C：$(x-3)^2+(y-3)^2=r^2(r>0)$ 上，点 $A(-1,0)$，$B(1,0)$ 均在圆 C 外，∴圆 $x^2+y^2=1$ 与圆 C 外切，且点 P 为切点，∴$1+r=\sqrt{(3-0)^2+(3-0)^2}$，∴$r=3\sqrt{2}-1$．故选 ABD．来源：高三答案公众号

11. BC　根据题意，函数 $y=f(x+1)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，则函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称；又由对任意 $x_1,x_2\in[1,+\infty)$，且 $x_1\neq x_2$ 都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 成立，所以函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上为增函数，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上为减函数，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得最小值；$\log_2 8=3$，$\log_{e^2}\frac{1}{4}=-\ln 2$，$e^{\ln 2}=2$，又由函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，$b=f\left(\log_{e^2}\frac{1}{4}\right)=f(-\ln 2)=f(2+\ln 2)$，易知 $2<2+\ln 2<3$，所以 $c<b<a$．故选 BC．

12. BCD　设直线 l 的方程为 $x=my+1$，联立 $\begin{cases}x=my+1,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 消去 x 并整理得 $y^2-4my-4=0$，则 $y_A+y_B=4m$，$y_Ay_B=-4$，又 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times1\times|y_A-y_B|=4$，所以 $(y_A-y_B)^2=(y_A+y_B)^2-4y_Ay_B=64$，解得 $m=\pm\sqrt{3}$，所以直线 l 的倾斜角为 30° 或 150°，$|AB|=2+x_A+x_B=2+m(y_A+y_B)+2=4+4m^2=16$，弦 AB 的中点坐标为 $\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$，即 $(7,\pm2\sqrt{3})$，$\frac{|AF|\cdot|BF|}{|AB|}=\frac{\frac{|y_A|}{\sin30^\circ}\cdot\frac{|y_B|}{\sin30^\circ}}{\frac{|y_A-y_B|}{\sin30^\circ}}=\frac{-4y_Ay_B}{|y_A-y_B|}=1$．故选 BCD．

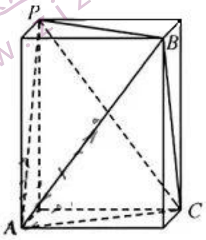
13. 3　由已知得 $f'(x)=ae^x+2x-8$，因为 $f'(0)=a-8=-5$，所以 $a=3$．

14. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　因为 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，所以 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=0$，即 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle-\boldsymbol{b}^2=0$，则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{b}^2}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{3\times1}=\frac{1}{3}$，所以 $\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\sqrt{1-\cos^2\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$．

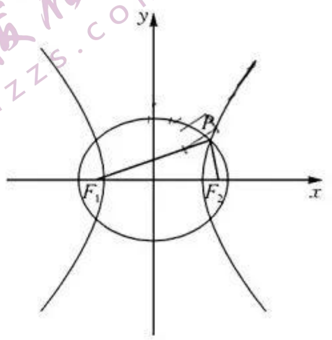
15. 29π　如图，将三棱锥 $P-ABC$ 放入长方体中，设该长方体的长、宽、高分别为 a,b,c，则

$$\begin{cases}b^2+c^2=(2\sqrt{5})^2,\\ a^2+b^2=(\sqrt{13})^2,\\ a^2+c^2=5^2,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}a=3,\\ b=2,\\ c=4.\end{cases}$ 设三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的半径为 R，则 $2R=\sqrt{3^2+2^2+4^2}=\sqrt{29}$，所以 $R=\frac{\sqrt{29}}{2}$．所以三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积 $S=4\pi\times\left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^2=29\pi$．



16. $(2,+\infty)$　设椭圆的长半轴长为 a_1，双曲线的实半轴长为 a_2，焦距 $2c$，点 P 为椭圆与双曲线在第一象限的交点，则 $|PF_1|+|PF_2|=2a_1$，$|PF_1|-|PF_2|=2a_2$，解得 $|PF_1|=a_1+a_2$，$|PF_2|=a_1-a_2$，如图：



在$\triangle F_1PF_2$中，根据余弦定理可得$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos\frac{2\pi}{3}$，整理得$4c^2=3a_1^2+a_2^2$，即

$\frac{3}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}=4$，设$t_1=e_1^2$，$t_2=e_2^2$，则有$0<t_1<1<t_2$，$\frac{3}{t_1}+\frac{1}{t_2}=4$，所以$\frac{1}{t_2}=4-\frac{3}{t_1}=\frac{4t_1-3}{t_1}$，即有$t_2=\frac{t_1}{4t_1-3}>1$，所以$\frac{3}{4}$

$<t_1<1$，所以$e_1^2+e_2^2=t_1+t_2=t_1+\frac{t_1}{4t_1-3}=\frac{4t_1^2-2t_1}{4t_1-3}$，设$u=4t_1-3$，则$t_1=\frac{u+3}{4}$，且$0<u<1$，所以$e_1^2+e_2^2=\frac{u^2+4u+3}{4u}$

$=\frac{1}{4}\left(u+\frac{3}{u}\right)+1$，因为$y=x+\frac{3}{x}$在$(0,1)$上单调递减，所以$u+\frac{3}{u}>4$，所以$e_1^2+e_2^2>2$.

17. (1)解：当$n=1$时，$a_2=2S_1+3$，即$a_2=2a_1+3=9$；…………1分

当$n\geqslant 2$时，由$a_{n+1}=2S_n+3(n\in\mathbf{N}^*)$，得$a_n=2S_{n-1}+3$，两式相减得$a_{n+1}=3a_n$. …………2分

又$a_2=3a_1$，所以$a_{n+1}=3a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，所以$\{a_n\}$是以3为首项，3为公比的等比数列. …………3分

所以$a_n=3\times 3^{n-1}=3^n$. …………4分

(2)证明：由(1)知$b_n=\frac{\log_3 a_n}{a_n}=\frac{n}{3^n}$，…………5分

所以$T_n=1\times\frac{1}{3}+2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$，$\frac{1}{3}T_n=1\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+2\times\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$，

两式相减得$\frac{2}{3}T_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{1}{2}-\frac{2n+3}{2\cdot 3^{n+1}}$，

所以$T_n=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4\times 3^n}$. …………8分

又$\frac{2n+3}{4\times 3^n}>0$，所以$T_n<\frac{3}{4}$. …………10分

18. 解：(1)因为该厂只有1名维修工人，

所以要使工厂正常运行，最多只能出现2台大型机器出现故障，…………1分

故该工厂能正常运行的概率为$(1-\frac{1}{2})^6+C_6^1\times\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{2})^5+C_6^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^4=\frac{11}{32}$. …………4分

(2)(ⅰ)X的可能取值为34，46，58，…………5分

$P(X=34)=(\frac{1}{2})^6=\frac{1}{64}$，…………6分

$P(X=46)=C_6^5\times\left(\frac{1}{2}\right)^5\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{32}$，…………7分

$P(X=58)=1-\frac{1}{64}-\frac{3}{32}=\frac{57}{64}$，…………8分

则X的分布列为

X	34	[illegible]	58
P	$\frac{1}{64}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{57}{64}$

…………9分

故$EX=34\times\frac{1}{64}+46\times\frac{3}{32}+58\times\frac{57}{64}=\frac{113}{2}$. …………10分

(ⅱ)若该厂有3名维修工人，则该厂获利的数学期望为$6\times 10-3=57$万元. …………11分

因为$\frac{113}{2}<57$，所以该厂应再招聘1名维修工人. …………12分

19. (1)证明：若 $b=c$ 时，则点 D 与 A 点重合，不满足题意，故 $b\neq c$. ………… 1 分

因为 $AB=BD=CD$，所以 $A=2C$， ………… 2 分

所以 $\sin A=\sin 2C=2\sin C\cos C$，由正弦定理及余弦定理得 $a=2c\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$， ………… 4 分

即 $a^2b=a^2c+b^2c-c^3$，所以 $a^2(b-c)=c(b^2-c^2)=c(b+c)(b-c)$，

因为 $b\neq c$，所以 $b-c\neq 0$，所以 $a^2=c(b+c)=bc+c^2$，

所以 $bc=a^2-c^2$. ………… 6 分

(2)解：由 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\angle ABC$ 及 $\cos\angle ABC=\frac{9}{16}$，$c=1$，得 $b^2=a^2+1-\frac{9}{8}a$， ………… 7 分

由(1)知 $bc=a^2-c^2$，所以 $b=a^2-1$，所以 $(a^2-1)^2=a^2+1-\frac{9}{8}a$， ………… 8 分

整理得 $8a^3-24a+9=0$，令 $2a=t$ 得：$t^3-12t+9=0$，

即 $(t-3)(t^2+3t-3)=0$，解得 $t_1=3$，$t_2=\frac{-3+\sqrt{21}}{2}$，$t_3=\frac{-3-\sqrt{21}}{2}<0$(舍去)， ………… 10 分

由 $b=a^2-1>0$，得 $a>1$，而 $a=\frac{t_2}{2}=\frac{-3+\sqrt{21}}{4}<1$ 舍去，故 $a=\frac{3}{2}$.

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin\angle ABC=\frac{3}{4}\sqrt{1-\left(\frac{9}{16}\right)^2}=\frac{15\sqrt{7}}{64}$. ………… 12 分

20. (1)证明：取 BC 的中点 M，连结 AM，EM，

则 $DA\parallel BB_1$，且 $DA=\frac{1}{2}BB_1$，$EM\parallel BB_1$，且 $EM=\frac{1}{2}BB_1$. ………… 2 分

所以 $DA\parallel EM$，且 $DA=EM$，所以四边形 AMED 为平行四边形， ………… 3 分

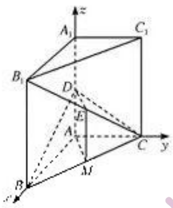
所以 $DE\parallel AM$.

又 $AM\subset$ 平面 ABC，$DE\not\subset$ 平面 ABC，

所以 $DE\parallel$ 平面 ABC. ………… 5 分

(2)解：以 A 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$，

设 $AB=1$，$AC=b(b>0)$，$AA_1=2c(c>0)$，



则 $B(1,0,0)$，$C(0,b,0)$，$D(0,0,c)$，$B_1(1,0,2c)$，$E\left(\frac{1}{2},\frac{b}{2},c\right)$.

所以 $\overrightarrow{DE}=\left(\frac{1}{2},\frac{b}{2},0\right)$，$\overrightarrow{BC}=(-1,b,0)$. ………… 6 分

因为 $DE\perp BC$，所以 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，所以 $b=1$. ………… 7 分

又 $\overrightarrow{BC}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{BD}=(-1,0,c)$，

设平面 BCD 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$；

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}-x+y=0,\\ -x+cz=0,\end{cases}$

令 $x=1$，则 $y=1$，$z=\frac{1}{c}$，所以 $\boldsymbol{n}=\left(1,1,\frac{1}{c}\right)$； ………… 8 分

又平面 ABD 的一个法向量 $\overrightarrow{AC}=(0,1,0)$，所以 $\cos\frac{\pi}{3}=\left|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AC}|}\right|$，

所以 $\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+1+\frac{1}{c^2}}}$，解得 $c=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,1,\sqrt{2})$. ………… 10 分

又 $\overrightarrow{B_1C}=(-1,1,-\sqrt{2})$，

设直线 B_1C 与平面 BCD 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{B_1C}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{B_1C}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{B_1C}|}=\frac{|-1+1-2|}{\sqrt{1+1+2}\cdot\sqrt{1+1+2}}=\frac{1}{2}$， ………… 11 分

所以直线 B_1C 与平面 BCD 所成角为 $\frac{\pi}{6}$. ………… 12 分

21. (1)解：因为 $|A_1A_2|=4$，所以 $2a=4$，解得 $a=2$. ………… 1 分

因为 C 过点 $\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$，所以 $\frac{(\sqrt{2})^2}{4}+\frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}{b^2}=1$， ………… 2 分

解得 $b=\sqrt{3}$. ………… 3 分

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………… 4 分

(2)证明：设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，所以 $l_{A_1M}: y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，$l_{A_2N}: y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$. ………………………… 6 分

由 $\begin{cases} y=k(x-4), \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 整理得 $(3+4k^2)x^2-32k^2x+64k^2-12=0$，

则 $\Delta=(-32k^2)^2-4(3+4k^2)(64k^2-12)>0$，解得 $-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$ 且 $k\neq 0$，$x_1+x_2=\frac{32k^2}{3+4k^2}$，

$x_1x_2=\frac{64k^2-12}{3+4k^2}$. ………………………… 8 分

由 $\begin{cases} y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2), \\ y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2), \end{cases}$ 得 $x=\dfrac{\frac{2y_2}{x_2-2}+\frac{2y_1}{x_1+2}}{\frac{y_2}{x_2-2}-\frac{y_1}{x_1+2}}=\frac{2k(x_2-4)(x_1+2)+2k(x_1-4)(x_2-2)}{k(x_2-4)(x_1+2)-k(x_1-4)(x_2-2)}=\frac{2x_1x_2-6x_1-2x_2}{3x_2-x_1-8}$

$=\frac{2x_1x_2-2(x_1+x_2)-4x_1}{3(x_1+x_2)-8-4x_1}=\dfrac{2\times\frac{64k^2-12}{3+4k^2}-2\times\frac{32k^2}{3+4k^2}-4x_1}{3\times\frac{32k^2}{3+4k^2}-8-4x_1}=1$, ………………………… 10 分

所以点 G 在定直线 $x=1$ 上. ………………………… 12 分

22. 解：(1)由题意知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{ax-1}{x^2}$. ………………………… 1 分

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，无最小值. ………………………… 2 分

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)<0$，得 $0<x<\frac{1}{a}$；令 $f'(x)>0$，得 $x>\frac{1}{a}$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{a}\right)=a\ln\frac{1}{a}+a=a-a\ln a$. ………………………… 3 分

所以 $a-a\ln a=a^2$，即 $\ln a+a=1$. 设 $g(a)=\ln a+a$，则 $g'(a)=\frac{1}{a}+1>0$，

所以 $g(a)$ 为 $(0,+\infty)$ 上的增函数，又 $g(1)=1$，所以 $a=1$. ………………………… 4 分

(2)由 $f(x_1)=f(x_2)$，得 $a\ln x_1+\frac{1}{x_1}=a\ln x_2+\frac{1}{x_2}$，即 $a\ln\frac{x_2}{x_1}+\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=0$，

XG

又 $x_1+x_2=2$，所以 $a\ln\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1+x_2}{2x_2}-\frac{x_1+x_2}{2x_1}=0$，得 $a\ln\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{2x_2}-\frac{x_2}{2x_1}=0$.

令 $t=\frac{x_2}{x_1}(t>1)$，则 $a\ln t+\frac{1}{2t}-\frac{1}{2}t=0$，令 $h(t)=a\ln t+\frac{1}{2t}-\frac{t}{2}$，

故问题可转化为函数 $h(t)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上有零点. ………………………… 5 分

$h'(t)=\frac{a}{t}-\frac{1}{2t^2}-\frac{1}{2}=\frac{-t^2+2at-1}{2t^2}$，其中 $h'(1)=a-1$.

因为函数 $y=-t^2+2at-1$ 的对称轴的方程为 $t=a$，且当 $t=1$ 时，$y=2(a-1)$，

故当 $a\leqslant 1$，则 $y<0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，所以 $h'(t)<0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，因为 $h(1)=0$，所以 $h(t)<0$，故 $h(t)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上无零点，不合题意.

………………………… 6 分

当 $a>1$，令 $h'(t)=0$，得 $-t^2+2at-1=0$，$\Delta=4a^2-4>0$，故 $h'(t)=0$ 有两不等实根 t_1 和 t_2，

设 $t_1<t_2$，且 $t_1t_2=1$，$t_1+t_2=2a>0$. 故 $0<t_1<1<t_2$.

易知在 $(1,t_2)$ 上，$h'(t)>0$，在 $(t_2,+\infty)$ 上，$h'(t)<0$，

所以 $h(t)$ 在 $(1,t_2)$ 上单调递增，在 $(t_2,+\infty)$ 上单调递减，

又 $h(1)=0$，故在 $(1,t_2)$ 上 $h(t)>h(1)=0$，故 $h(t)$ 在 $(1,t_2)$ 上无零点； ………………………… 7 分

下面证明函数 $h(t)$ 在减区间 $(t_2,+\infty)$ 上存在零点.

取 $t=e^{2a}(a>1)$，则 $h(e^{2a})=a\ln e^{2a}+\frac{1}{2e^{2a}}-\frac{e^{2a}}{2}=2a^2+\frac{1}{2e^{2a}}-\frac{e^{2a}}{2}$，

当 $a>1$ 时，$\frac{1}{2e^{2a}}<\frac{1}{2e^2}<\frac{1}{2}$，则 $h(e^{2a})<2a^2+\frac{1}{2}-\frac{e^{2a}}{2}$. ………………………… 8 分

令 $m(a)=2a^2+\frac{1}{2}-\frac{e^{2a}}{2}$，则 $m'(a)=4a-e^{2a}$，

令 $\varphi(a)=4a-e^{2a}$，当 $a>1$ 时，$\varphi'(a)=4-2e^{2a}<4-2e^2<0$，

所以，函数 $\varphi(a)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，又 $\varphi(1)=4-e^2<0$，所以 $\varphi(a)<0$，即 $m'(a)<0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立.

………………………… 10 分

所以 $m(a)=2a^2+\frac{1}{2}-\frac{e^{2a}}{2}$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $h(e^{2a})<m(a)<m(1)=\frac{5}{2}-\frac{e^2}{2}<0$，即 $h(e^{2a})<0$，

………………………… 11 分

又 $h(t_2)>0$，所以 $h(t_2)h(e^{2a})<0$，所以 $h(t)$ 在减区间 $(t_2,+\infty)$ 上存在零点.

综上，实数 a 的取值范围是 $(1,+\infty)$. ………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。