高考立体几何知识点总结

一 、空间几何体

（一） 空间几何体的类型

1 多面体：由若干个平面多边形围成的几何体。围成多面体的各个多边形叫做多面体的面，相邻两个面的公共边叫做多面体的棱，棱与棱的公共点叫做多面体的顶点。

2 旋转体：把一个平面图形绕它所在的平面内的一条定直线旋转形成了封闭几何体。其中，这条直线称为旋转体的轴。

（二） 几种空间几何体的结构特征

1 、棱柱的结构特征

1.1 棱柱的定义：有两个面互相平行，其余各面都是四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行，由这些面所围成的几何体叫做棱柱。

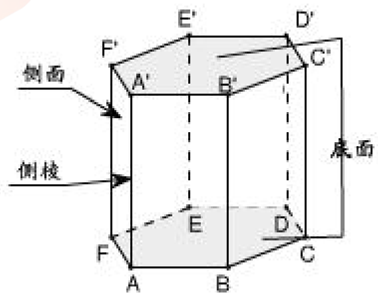


图 1-1 棱柱

1.2 棱柱的分类

$$①\text{棱柱}\begin{cases}\text{斜棱柱}\\ \xrightarrow{\text{棱垂直于底面}}\text{直棱柱}\begin{cases}\xrightarrow{\text{底面是正多形}}\text{正棱柱}\\ \text{其他棱柱}\cdots\end{cases}\end{cases}$$

$$\text{棱柱}\xrightarrow{\text{底面是四边形}}\text{四棱柱}\xrightarrow{\text{底面是平行四边形}}\text{平行六面体}\xrightarrow{\text{侧棱垂直于底面}}\text{直平行六面体}\xrightarrow{\text{底面是矩形}}\text{长方体}\xrightarrow{\text{底面是正方形}}\text{正四棱柱}\xrightarrow{\text{棱长都相等}}\text{正方体}$$

性质：

Ⅰ、侧面都是平行四边形，且各侧棱互相平行且相等；

Ⅱ、两底面是全等多边形且互相平行；

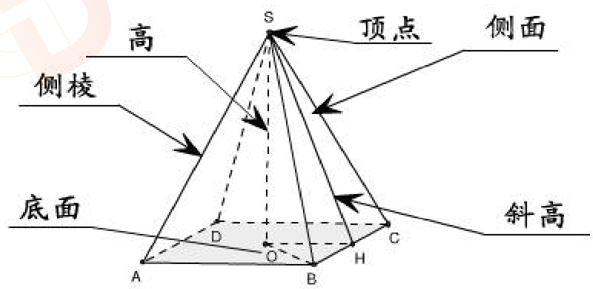
Ⅲ、平行于底面的截面和底面全等；

1.3 棱柱的面积和体积公式

$S_{直棱柱侧}=ch$ （c是底周长， h是高）

$$\mathbf{S}_{直棱柱表面}=\mathbf{c}\cdot\mathbf{h}+2\mathbf{S}_{底}$$

$$\mathbf{V}_{棱柱}=\mathbf{S}_{底}\cdot\mathbf{h}$$



2 、棱锥的结构特征

2.1 棱锥的定义

（1） 棱锥：有一个面是多边形，其余各面是有一个公共顶点的三角形，由这些面所围成的几何体叫做棱锥。

（2）正棱锥：如果有一个棱锥的底面是正多边形，并且顶点在底面的投影是底

面的中心，这样的棱锥叫做正棱锥。

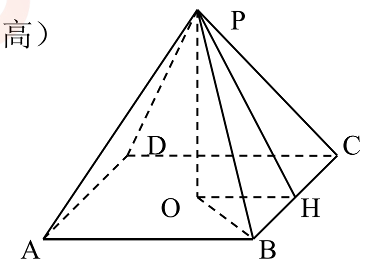
2.2 正棱锥的结构特征

Ⅰ、 平行于底面的截面是与底面相似的正多边形，相似比等于顶点到截面的距离与顶点到底面的距离之比；它们面积的比等于截得的棱锥的高与原棱锥的高的平方比；截得的棱锥的体积与原棱锥的体积的比等于截得的棱锥的高与原棱锥的高的立方比；

Ⅱ、 正棱锥的各侧棱相等，各侧面是全等的等腰三角形；

正棱锥侧面积： $S_{正棱椎}=\frac{1}{2}ch'$（c 为底周长，h' 为斜高）

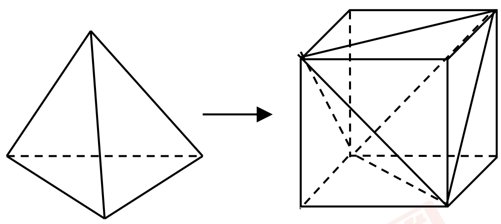
体积： $V_{棱椎}=\frac{1}{3}Sh$（S 为底面积，h 为高）



正四面体：

对于棱长为 a 正四面体的问题可将它补成一个边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ 的正方体问题。

对棱间的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$（正方体的边长）



正四面体的高 $\frac{\sqrt{6}}{3}a$（$=\frac{2}{3}l_{正方体体对角线}$）

正四面体的体积为 $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$（$V_{正方体}-4V_{小三棱锥}=\frac{1}{3}V_{正方体}$）

正四面体的中心到底面与顶点的距离之比为 $1:3$（$=\frac{1}{6}l_{正方体体对角线}:\frac{1}{2}l_{正方体体对角线}$）

3 、棱台的结构特征

3.1 棱台的定义：用一个平行于底面的平面去截棱锥，我们把截面和底面之间的部分称为棱台。

3.2 正棱台的结构特征

（1）各侧棱相等，各侧面都是全等的等腰梯形；

（2）正棱台的两个底面和平行于底面的截面都是正多边形；

（3）正棱台的对角面也是等腰梯形；

（4）各侧棱的延长线交于一点。

4 、圆柱的结构特征

4.1 圆柱的定义：以矩形的一边所在的直线为旋转轴，其余各边旋转而形成的曲面所围成的几何体叫圆柱。

4.2 圆柱的性质

（1）上、下底及平行于底面的截面都是等圆；

（2）过轴的截面(轴截面)是全等的矩形。

4.3 圆柱的侧面展开图：圆柱的侧面展开图是以底面周长和母线长为邻边的矩形。

4.4 圆柱的面积和体积公式

$S_{\text{圆柱侧面}} = 2\pi \cdot r \cdot h$　(r 为底面半径，h 为圆柱的高)

$S_{\text{圆柱全}} = 2\pi r h + 2\pi r^2$

$V_{\text{圆柱}} = S_{\text{底}} h = \pi r^2 h$

5、圆锥的结构特征

5.1 圆锥的定义：以直角三角形的一直角边所在的直线为旋转轴，其余各边旋转而形成的曲面所围成的几何体叫做圆锥。

5.2 圆锥的结构特征

（1） 平行于底面的截面都是圆，截面直径与底面直径之比等于顶点到截面的距离与顶点到底面的距离之比；

（2）轴截面是等腰三角形；

（3）母线的平方等于底面半径与高的平方和：

$$l^2 = r^2 + h^2$$

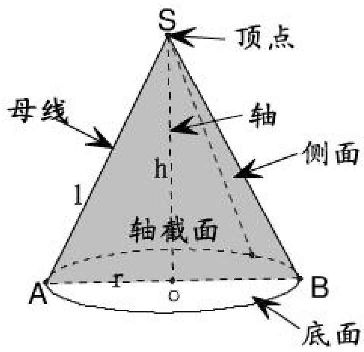


图 1-5 圆锥

5.3 圆锥的侧面展开图：圆锥的侧面展开图是以顶点为圆心，以母线长为半径的扇形。

6、圆台的结构特征

6.1 圆台的定义：用一个平行于底面的平面去截圆锥，我们把截面和底面之间的部分称为圆台。

6.2 圆台的结构特征

⑴ 圆台的上下底面和平行于底面的截面都是圆；

⑵ 圆台的截面是等腰梯形；

⑶ 圆台经常补成圆锥，然后利用相似三角形进行研究。

6.3 圆台的面积和体积公式

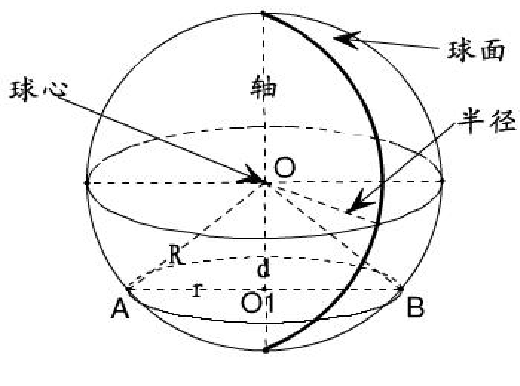
$S_{\text{圆台侧}} = \pi \cdot (R + r) \cdot l$　(r、R 为上下底面半径)

$S_{\text{圆台全}} = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot R^2 + \pi \cdot (R + r) \cdot l$

$V_{\text{圆台}} = 1/3\ (\pi r^2 + \pi R^2 + \pi r R)\ h$　(h 为圆台的高)

7 球的结构特征

7.1 球的定义：以半圆的直径所在的直线为旋转轴，半圆旋转一周形成的旋转体叫做球体。空间中，与定点距离等于定长的点的集合叫做球



面，球面所围成的几何体称为球体。

7-2 球的结构特征

⑴ 球心与截面圆心的连线垂直于截面；

⑵ 截面半径等于球半径与截面和球心的距离的平方差：$r^2 = R^2 - d^2$

★7-3 球与其他多面体的组合体的问题

球体与其他多面体组合，包括内接和外切两种类型，解决此类问题的基本思路是：

⑴ 根据题意，确定是内接还是外切，画出立体图形；

⑵ 找出多面体与球体连接的地方，找出对球的合适的切割面，然后做出剖面图；

⑶ 将立体问题转化为平面几何中圆与多边形的问题；

⑷ 注意圆与正方体的两个关系：球内接正方体，球直径等于正方体对角线；

球外切正方体，球直径等于正方体的边长。

7-4 球的面积和体积公式

$S_{球面} = 4\pi R^2$ (R 为球半径)

$V_{球} = 4/3\,\pi R^3$

（三）空间几何体的表面积与体积

空间几何体的表面积

棱柱、棱锥的表面积：各个面面积之和

圆柱的表面积 ：$\boldsymbol{S = 2\pi rl + 2\pi r^2}$

圆锥的表面积：$S = \pi rl + \pi r^2$

圆台的表面积：$S = \pi rl + \pi r^2 + \pi Rl + \pi R^2$

球的表面积：$S = 4\pi R^2$

扇形的面积公式 $S_{扇形} = \dfrac{n\pi R^2}{360} = \dfrac{1}{2}lr = \dfrac{1}{2}|\alpha| r^2$（其中 l 表示弧长，r 表示半径，$\boldsymbol{\alpha}$ 表示弧度）

空间几何体的体积

柱体的体积 ：$V = S_{底} \times h$

锥体的体积 ：$V = \dfrac{1}{3}S_{底} \times h$

台体的体积 ： $V = \dfrac{1}{3}(S_{上} + \sqrt{S_{上}S_{下}} + S_{下}) \times h$

球体的体积：$V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$

（四）空间几何体的三视图和直观图

正视图：光线从几何体的前面向后面正投影，得到的投影图。

侧视图：光线从几何体的左边向右边正投影，得到的投影图。

俯视图：光线从几何体的上面向右边正投影，得到的投影图。

★画三视图的原则：

正俯长相等、正侧高相同、俯侧宽一样

注：球的三视图都是圆；长方体的三视图都是矩形

直观图：斜二测画法

斜二测画法的步骤：

（1）平行于坐标轴的线依然平行于坐标轴；

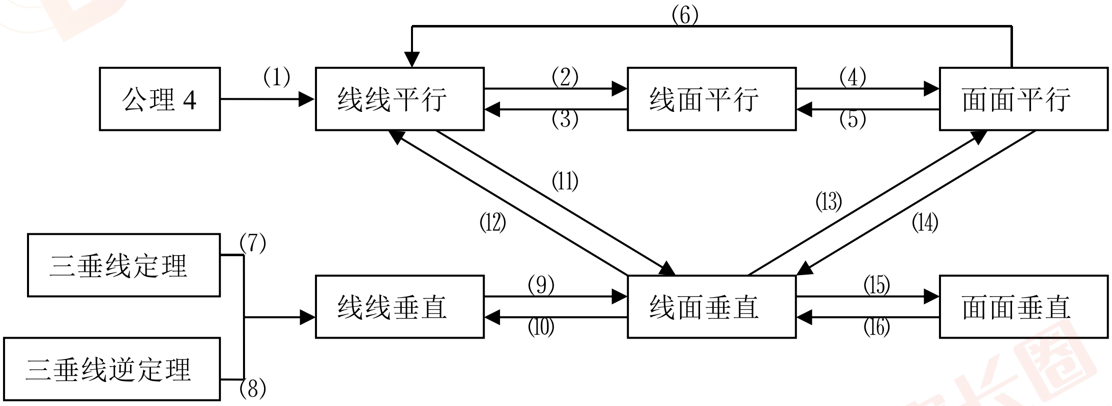
（2）平行于 y 轴的线长度变半，平行于 x，z 轴的线长度不变；

（3）画法要写好

用斜二测画法画出长方体的步骤：（1）画轴（2）画底面（3）画侧棱（4）成图

二 、点、直线、平面之间的关系

（一）、立体几何网络图：



1、线线平行的判断：

（1）、平行于同一直线的两直线平行。

（3）、如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线和交线平行。

（6）、如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行。

（12）、垂直于同一平面的两直线平行。

2、线线垂直的判断：

（7）、在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线的射影垂直，那么它也和这条斜线垂直。

（8）、在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线垂直，那么它和这条斜线的射影垂直。

（10）、若一直线垂直于一平面，这条直线垂直于平面内所有直线。

补充：一条直线和两条平行直线中的一条垂直，也必垂直平行线中的另一条。

3、线面平行的判断：

（2）、如果平面外的一条直线和平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行。

（5）、两个平面平行，其中一个平面内的直线必平行于另一个平面。

判定定理： $\left.\begin{array}{l} a\parallel b \\ a\not\subset\alpha \\ b\subset\alpha \end{array}\right\}\Rightarrow a\parallel\alpha$（线线平行$\Rightarrow$线面平行）

性质定理： $\left.\begin{array}{l} a\parallel\alpha \\ a\subset\beta \\ \alpha\cap\beta=b \end{array}\right\}\Rightarrow a\parallel b$（线面平行$\Rightarrow$线线平行）

★判断或证明线面平行的方法

⑴ 利用定义(反证法)：$l\cap\alpha=\varnothing$，则 $l\parallel\alpha$ (用于判断)；

⑵ 利用判定定理：线线平行$\Rightarrow$线面平行 (用于证明)；

⑶ 利用平面的平行：面面平行$\Rightarrow$线面平行 (用于证明)；

⑷ 利用垂直于同一条直线的直线和平面平行(用于判断)。

2 线面斜交和线面角：$l\cap\alpha=A$

2.1 直线与平面所成的角(简称线面角)：若直线与平面斜交，则平面的斜线与该斜线在平面内射影的夹角θ。

2.2 线面角的范围：θ∈[0°，90°]

注意：当直线在平面内或者直线平行于平面时，θ=0°；

当直线垂直于平面时，θ=90°

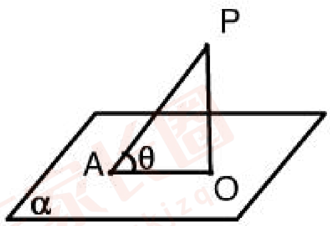


图 2-3 线面角

4、线面垂直的判断：

⑼如果一直线和平面内的两相交直线垂直，这条直线就垂直于这个平面。

⑾如果两条平行线中的一条垂直于一个平面，那么另一条也垂直于这个平面。

⒁一直线垂直于两个平行平面中的一个平面，它也垂直于另一个平面。

⒃如果两个平面垂直，那么在一个平面内垂直于交线的直线必垂直于另一个平面。

判定定理： $\left.\begin{array}{l} a,b\subset\alpha \\ a\cap b=O \\ l\not\subset\alpha \\ l\perp a \\ l\perp b \end{array}\right\}\Rightarrow l\perp\alpha$（线线垂直$\Rightarrow$线面垂直）

性质定理：（1）若直线垂直于平面，则它垂直于平面内任意一条直线。

即：　$l\perp\alpha, a\subset\alpha \Rightarrow l\perp a$（线面垂直⇒线线垂直）

（2）垂直于同一平面的两直线平行。

即：　$a\perp\alpha, b\perp\alpha \Rightarrow a//b$

★判断或证明线面垂直的方法

⑴ 利用定义，用反证法证明。

⑵ 利用判定定理证明。

⑶ 一条直线垂直于平面而平行于另一条直线，则另一条直线也垂直与平面。

⑷ 一条直线垂直于两平行平面中的一个，则也垂直于另一个。

⑸ 如果两平面垂直，在一平面内有一直线垂直于两平面交线，则该直线垂直于另一平面。

★1.5 三垂线定理及其逆定理

⑴ 斜线定理：从平面外一点向这个平面所引的所有线段中，斜线相等则射影相等，斜线越长则射影越长，垂线段最短。

如图：$PB=PC \Leftrightarrow OB=OC$；$PA>PB \Leftrightarrow OA>OB$

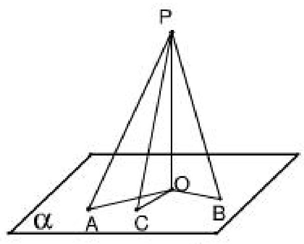


图 2-7 斜线定理

⑵ 三垂线定理及其逆定理

已知 PO⊥α，斜线 PA 在平面α内的射影为 OA，a 是平面α内的一条直线。

① 三垂线定理：若 a⊥OA，则 a⊥PA。即垂直射影则垂直斜线。

② 三垂线定理逆定理：若 a⊥PA，则 a⊥OA。即垂直斜线则垂直射影。

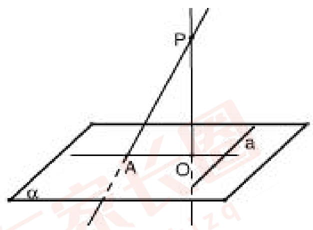


图 2-8 三垂线定理

⑶ 三垂线定理及其逆定理的主要应用

① 证明异面直线垂直；

② 作出和证明二面角的平面角；

③ 作点到线的垂线段。

5、面面平行的判断：

⑷一个平面内的两条相交直线分别平行于另一个平面，这两个平面平行。

⒀垂直于同一条直线的两个平面平行。

6、面面垂直的判断：

⒂一个平面经过另一个平面的垂线，这两个平面互相垂直。

判定定理：　$\left.\begin{array}{l} a\subset\alpha \\ a\perp\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha\perp\beta$（线面垂直⇒面面垂直）

性质定理：

⑴ 若两面垂直，则这两个平面的二面角的平面角为 90°；

（2） $\left.\begin{array}{l}\alpha\perp\beta\\ \alpha\cap\beta=AB\\ a\subset\alpha\\ a\perp AB\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp\beta$（面面垂直⇒线面垂直）

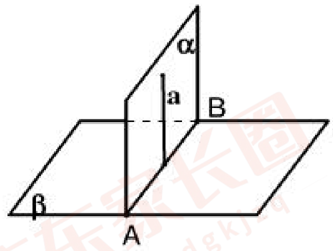


图 2-10 面面垂直性质 2

（3）

$\left.\begin{array}{l}\alpha\perp\beta\\ A\in\alpha\\ A\in a\\ a\perp\beta\end{array}\right\}\Rightarrow a\subset\alpha$

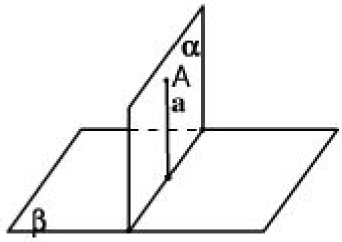


图 2-11 面面垂直性质 3

（4） $\left.\begin{array}{l}\alpha\perp\beta\\ a\perp\beta\end{array}\right\}\Rightarrow a\subset\alpha\text{或}a\,//\,\alpha$

（二）、其他定理：

（1）确定平面的条件：①不公线的三点；②直线和直线外一点；③相交直线；

（2）直线与直线的位置关系： 相交 ； 平行 ； 异面 ；

直线与平面的位置关系： 在平面内 ； 平行 ； 相交（垂直是它的特殊情况） ；

平面与平面的位置关系： 相交 ;； 平行 ；

（3）等角定理：如果两个角的两边分别平行且方向相同，那么这两个角相等；

如果两条相交直线和另外两条相交直线分别平行，那么这两组直线所成的锐角(或直角)相等；

（4）射影定理（斜线长、射影长定理）：从平面外一点向这个平面所引的垂线段和斜线段中，射影相等的两条斜线段相等；射影较长的斜线段也较长；反之，斜线段相等的射影相等；斜线段较长的射影也较长；垂线段比任何一条斜线段都短。

（5）最小角定理：斜线与平面内所有直线所成的角中最小的是与它在平面内射影所成的角。

（6）异面直线的判定：

①反证法；

②过平面外一点与平面内一点的直线，和平面内不过该点的直线是异面直线。

（7）过已知点与一条直线垂直的直线都在过这点与这条直线垂直平面内。

（8）如果一直线平行于两个相交平面，那么这条直线平行于两个平面的交线。

（三）、唯一性定理：

（1）过已知点，有且只能作一直线和已知平面垂直。

（2）过已知平面外一点，有且只能作一平面和已知平面平行。

（3）过两条异面直线中的一条能且只能作一平面与另一条平行。

四、空间角的求法：（所有角的问题最后都要转化为解三角形的问题，尤其是直角三角形）

（1）异面直线所成的角：通过直线的平移，把异面直线所成的角转化为平面内相交直线所成的角。异面直线所成角的范围：$0^o < \alpha \le 90^o$；

（2）线面所成的角：①线面平行或直线在平面内：线面所成的角为0^o； ②线面垂直：线面所成的角为90^o；

③斜线与平面所成的角：范围$0^o < \alpha < 90^o$；即也就是斜线与它在平面内的射影所成的角。

线面所成的角范围$0^o \le \alpha \le 90^o$

（3）二面角：关键是找出二面角的平面角。方法有：①定义法；②三垂线定理法；③垂面法；

二面角的平面角的范围：$0^o \le \alpha < 180^o$；

五、距离的求法：

（1）点点、点线、点面距离：点与点之间的距离就是两点之间线段的长、点与线、面间的距离是点到线、面垂足间线段的长。求它们首先要找到表示距离的线段，然后再计算。

注意：求点到面的距离的方法：

①直接法：直接确定点到平面的垂线段长（垂线段一般在二面角所在的平面上）；

②转移法：转化为另一点到该平面的距离（利用线面平行的性质）；

③体积法：利用三棱锥体积公式。

（2）线线距离：关于异面直线的距离，常用方法有：

①定义法，关键是确定出a,b的公垂线段；

②转化为线面距离，即转化为a与过b而平行于a的平面之间的距离，关键是找出或构造出这个平面；③转化为面面距离；

（3）线面、面面距离：线面间距离面面间距离与线线间、点线间距离常常相互转化；

六、常用的结论：

（1）若直线l在平面α内的射影是直线l'，直线m是平面α内经过l的斜足的一条直线，l与l' 所成的角为θ_1，l'与m所成的角为θ_2，l与m所成的角为θ，则这三个角之间的关系是$\underline{\underline{\cos\theta=\cos\theta_1\cos\theta_2}}$；

（2）如何确定点在平面的射影位置：

①Ⅰ、如果一个角所在平面外一点到角两边距离相等，那么这点在平面上的射影在这个角的平分线上；

Ⅱ、经过一个角的顶角引这个角所在平面的斜线，如果斜线和这个角的两边夹角相等，那么斜线上的点在平面上的射影在这个角的平分线所在的直线上；

Ⅲ、如果平面外一点到平面上两点的距离相等，则这一点在平面上的射影在以这两点为端点的线段的垂直平分线上。

②垂线法：如果过平面外一点的斜线与平面内的一条直线垂直，那么这一点在这平面上的射影在过斜足且垂直于平面内直线的直线上(三垂线定理和逆定理)；

③垂面法：如果两平面互相垂直，那么一个平面内任一点在另一平面上的射影在这两面的交线上(面面垂直的性质定理)；

④整体法：确定点在平面的射影，可先确定过一点的斜线这一整体在平面内的射影。

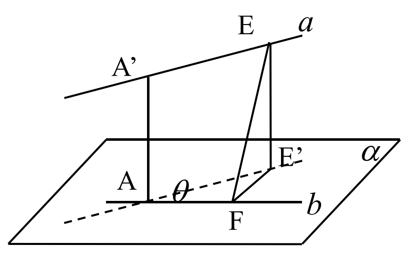
（3）在四面体$ABCD$中：

①若$AB\perp CD,BC\perp AD$，则$\underline{\underline{AC\perp BD}}$；且$A$在平面$BCD$上的射影是$\Delta BCD$的垂心。

②若$AB=AC=AD$，则A在平面BCD上的射影是ΔBCD的外心。

③若A到BC,CD,BD边的距离相等，则A在平面BCD上的射影是ΔBCD的内心。

（4）异面直线上两点间的距离公式：若异面直线所成的角为θ，它们公垂线段AA'的长为d，在a,b上分别取一点E,F，设$A'E=m$，$AF=n$；



则$EF=\sqrt{d^2+m^2+n^2\pm 2mn\cos\theta}$

（如果$\angle E'AF$为锐角，公式中取负号，如果$\angle E'AF$为钝，公式中取正号）