学校________ 班级________ 姓名________ 学号________

密封线内不要答题

2023届炎德英才长郡十八校联盟高三第二次联考(全国卷)

数　学(理科)

审校、制作:湖南炎德文化实业有限公司

由 江西九江一中;江西南昌二中;江西师大附中;江西吉安一中;江西新余一中;江西宜春中学;江西高安中学;江西泽泉一中;河南实验中学;广西柳州高级中学;江西宜春一中;湖南名校 联合命题

命题学校:江西吉安一中　审题学校:江西吉安一中

本试卷共6页。时量120分钟。满分150分。

第Ⅰ卷

一、选择题:本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1,2,3\}$,$B=\{x\mid \ln x>0\}$,则 $A\cap B$ 的子集个数为

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

2. 已知复数 z_1,z_2 满足 z_1 在复平面中对应的点为$(-2,1)$,且$|z_1\cdot z_2|=\sqrt{5}$,则 z_2 不可能是下列的

A. 1　　B. $1+i$　　C. i　　D. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,m)$,$\boldsymbol{b}=(-2,1)$,$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$,则 $m=$

A. 4　　B. 3　　C. 1　　D. 2

4. 已知直线 $l_1:(a+4)x+ay+1=0$,$l_2:(a-2)x+y+2=0$,则"$a=-1$"是"$l_1/\!/l_2$"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 已知 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-3$,则 $\cos\left(2\alpha+\frac{5\pi}{6}\right)=$

A. $-\frac{3}{5}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $-\frac{4}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

6. 设 α,β 是两个不同的平面,a,b 是两条不同的直线,下列说法正确的是

A. 若 $a\perp\alpha,b\perp\beta,a\perp b$,则 $\alpha/\!/\beta$

B. 若 $a\perp\alpha,b\subset\beta,a\perp b$,则 $\alpha\perp\beta$

C. 若 $a\perp\alpha,b\perp\beta,a/\!/b$,则 $\alpha/\!/\beta$

D. 若 $a\perp\alpha,a\perp b,\alpha\cap\beta=b$,则 $\alpha\perp\beta$

7. 在区间[0,2]上任取两个数，则这两个数之和小于$\frac{6}{5}$的概率是

A. $\frac{2}{5}$　　B. $\frac{9}{50}$　　C. $\frac{17}{25}$　　D. $\frac{24}{25}$

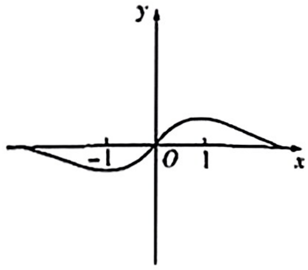
8. 已知函数 $f(x)=e^{x}-e^{-x}$，$g(x)=\cos x$，下图可能是下列哪个函数的图象

A. $f(x)+g(x)-2$

B. $f(x)-g(x)+2$

C. $f(x)\cdot g(x)$

D. $\frac{g(x)}{f(x)}$



9. 已知实数 x,y 满足 $\begin{cases}2x-y-2\leqslant 0,\\ x-2y-2\geqslant 0,\\ x\geqslant 0,\end{cases}$ 若 $z=y+ax$ 的最小值是 $-\frac{8}{3}$，则 a 的值为

A. -3　　B. -2　　C. -1　　D. 1

10. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的棱长均为 3，且四个顶点均在球心为 O 的球面上，点 E 在 AB 上，$AE=\frac{2}{3}AB$，过点 E 作球 O 的截面，则截面面积的最小值为

A. 2π　　B. 4π　　C. 5π　　D. 6π

11. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为 $F(c,0)$，点 P，Q 在直线 $x=\frac{a^2}{c}$ 上，$FP\perp FQ$，O 为坐标原点，若 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OF}^2$，则该双曲线的离心率为

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　C. 2　　D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

12. 已知函数 $f(x)=xe^{x}$ 与 $g(x)=\ln x+(a^2-2a-2)x+1$，$(a\in\mathbf{R})$的图象存在公共点，则实数 a 的取值范围是

A. $(-\infty,-3)$　　B. $(-\infty,-1)$

C. $(3,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$

第Ⅱ卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知命题 p：$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$x_0^2-5x_0+3>0$，则 $\neg p$ 为__________.

14. $(3x+1)\left(x-\frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中含 x^4 项的系数为__________.

15. 已知抛物线 $C:y^2=8x$ 的焦点为 F，点 M 是抛物线 C 上的动点，过点 F 作直线 $(a-1)x+y-4a+1=0$ 的垂线，垂足为 P，则 $|MF|+|MP|$ 的最小值为________.

16. 锐角三角形 ABC 的三个内角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，若 $a=3$，且 $b^2-a^2=ac$，则 $\frac{c-3}{b}$ 的取值范围是________

三、解答题：本大题共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

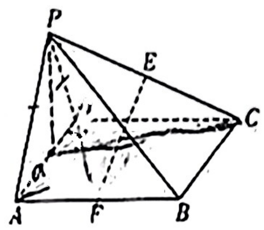
17.（本小题满分 12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=-1$，若对任意自然数 $n\geqslant 2$，a_n 是 $5S_n-2$ 和 $5-S_{n-1}$ 的等差中项.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)求 $\{a_n\}$ 前 n 项和 S_n.

18.（本小题满分 12 分）



在底面为正方形的四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$PA=PD=\sqrt{5}$，E,F 分别为棱 PC 和 AB 的中点.

(1)求证：$FD\perp PC$；

(2)若平面 PAD 与平面 PBC 所成锐二面角的大小为 $\frac{\pi}{4}$，求直线 FE 与平面 PBC 所成角的正弦值.

19.（本小题满分 12 分）

为响应习近平总书记"全民健身"的号召，促进学生德智体美劳全面发展，某学校设计了一款足球游戏：场地上共有大、小 2 个球门，学生对大门和小门依次射门一次，射进大门后才能进行小门射球，两次均进球者可得到一个吉祥物"吉利熊". 已知甲、乙、丙 3 位同学射进大门的概率依次为$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{3}{4}$，射进小门的概率依次为$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$. 假设各次进球与否互不影响.

（1）求这 3 人中至少有 2 人射进大门的概率；

（2）记这 3 人中得到"吉利熊"的人数为 X，求 X 的分布列及期望.

20.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=xe^x$，$g(x)=\frac{1}{2}ax^2+ax+b$.

(1)讨论函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ 的单调性；

(2)若 $a>0$，当 $x\in[-\sqrt{2},0)\cup(0,+\infty)$ 时，若 $\frac{f(x)}{x}\cdot g(x)+b\geqslant 0$ 恒成立，求 a 的取值范围.

21.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的短轴长为 $2\sqrt{3}$，左、右焦点分别为 F_1,F_2，$P\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 是 E 上一点.

(1)求 E 的方程；

(2)设任意过 F_2 的直线 l 交 E 于 M,N，分别作 E 在点 M,N 上的两条切线，并记它们的交点为 P，过 F_1 作平行于 l 的直线分别交 PM，PN 于 A,B，求 $\frac{|OA+OB|}{\text{[illegible]}}$ 的取值范围.

(二)选考题：共10分．请考生在22、23题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分．

22.（本小题满分10分）[坐标系与参数方程]

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{4}{1+t^2}, \\ y=\dfrac{4t}{1+t^2} \end{cases}$（$t\in\mathbf{R}$，$t$ 为参数），曲线 C_2 的普通方程为 $\sqrt{3}x+y+2a=0(a>0)$，以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系．

(1)写出 C_1 的普通方程与 C_2 的极坐标方程；

(2)若 C_1 与 C_2 有公共点，求 a 的取值范围．

23.（本小题满分10分）[不等式选讲]

已知函数 $f(x)=\left|2x+\dfrac{1}{2}\right|+\left|2x-\dfrac{1}{2}\right|$.

(1)求不等式 $f(x)>8$ 的解集；

(2)若 $f(x)$ 的最小值为 M，且 $2a+4b=M(a>0,b>0)$，求 $\dfrac{1}{2a+b}+\dfrac{1}{3b}$ 的最小值．