

唐山市 2023—2024 学年度高三年级摸底演练

数 学

本试卷共 4 页，22 小题，满分 150 分。考试时间 120 分钟。

注意事项：

- 答卷前，考生务必用黑色钢笔或签字笔将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。将条形码横贴在答题卡上“条形码粘贴处”。
- 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔在答题卡上将对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再涂其他答案。答案不能答在试卷上。
- 非选择题必须用 0.5 毫米黑色字迹签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
- 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- 已知集合 $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $N = \{x | x^2 - x - 2 \leq 0\}$, 则 $M \cap N =$
A. $\{-2, -1, 0, 1\}$ B. $\{-2, 1\}$
C. $\{-1, 0, 1, 2\}$ D. $\{-1, 2\}$
- 已知 $z = \frac{1+i}{2-2i}$, 则 $z - \bar{z} =$
A. $-i$ B. i
C. 0 D. 1
- 已知 $\vec{AB} = (1, 1)$, $\vec{AC} = (2, 1)$, 则 $\vec{AC} \cdot \vec{BC} =$
A. -1 B. -2
C. 1 D. 2
- 已知曲线 $f(x) = 2^x \cos x$ 在 $x=0$ 处的切线为 l , 则 l 的斜率为
A. $\ln 2$ B. $-\ln 2$
C. 1 D. -1
- 已知直线 $l: x - y + 2 = 0$, 圆 $C: x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$), 若圆 C 上恰有三个点到直线 l 的距离都等于 $\sqrt{2}$, 则 $r =$
A. 2 B. 4
C. $2\sqrt{2}$ D. 8
- 设甲: $\{a_n\}$ 为等比数列; 乙: $\{a_n \cdot a_{n+1}\}$ 为等比数列, 则
A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件
B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件
C. 甲是乙的充要条件
D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

7. 已知 O 为坐标原点, 点 $E(-1, 5)$ 是抛物线 $C: y^2 = 2px$ 的准线上一点, 过点 E 的直线 l 与抛物线 C 交于 A, B 两点, 若 $OA \perp OB$, 则 $\triangle AOB$ 的面积为

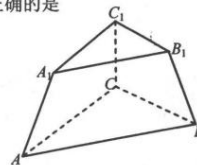
- A. $4\sqrt{3}$ B. $8\sqrt{3}$
C. $4\sqrt{3}$ D. $8\sqrt{3}$

8. 设 $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $P = \sqrt{2} \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin 2\beta$. 当 P 取得最大值时, α, β 满足

- A. $\tan \alpha = \sqrt{2}, \tan \beta = \sqrt{3}$ B. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan \beta = \sqrt{3}$
C. $\tan \alpha = \sqrt{2}, \tan \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

- 有两组样本数据，分别为 x_1, x_2, \dots, x_6 和 y_1, y_2, y_3, y_4 , 且平均数 $\bar{x} = 90, \bar{y} = 80$, 标准差分别为 6 和 4, 将两组数据合并为 z_1, z_2, \dots, z_{10} , 重新计算平均数和标准差, 则
A. 平均数为 85 B. 平均数为 86
C. 标准差为 10 D. 标准差为 $2\sqrt{13}$
- 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(2x-1)$ 是周期为 2 的奇函数, 则
A. $f(1) = 0$ B. $f(2) = 0$
C. $f(3) = 0$ D. $f(4) = 0$
- 把物体放在冷空气中冷却, 如果物体原来的温度是 $\theta_1^\circ\text{C}$, 空气的温度是 $\theta_0^\circ\text{C}$, 那么 t min 后物体的温度 θ (单位: $^\circ\text{C}$) 可由公式 $\theta = f(t) = \theta_0 + (\theta_1 - \theta_0)e^{-kt}$ 求得, 其中 k 是一个随着物体与空气的接触状况而定的正常数. 已知 $\theta_1 > \theta_0 > 0$.
A. 若 $k = \ln 2, \theta_1 = 5\theta_0$, 则经过 4 min 后, 该物体的温度降为原来的 $\frac{1}{4}$
B. 若 $\theta_1 = 5\theta_0$, 则存在 t , 使得经过 t min 后物体的温度是经过 $2t$ min 后物体温度的 2 倍
C. 若 $0 < t_1 < t_2 < t_3$, 且 $t_1 + t_3 = 2t_2$, 则 $f(t_1) + f(t_3) > 2f(t_2)$
D. 若 $0 < t_1 < t_2 < t_3$, 且 $t_1 + t_3 = 2t_2$, $f'(t)$ 是 $f(t)$ 的导数, 则 $f'(t_1) + f'(t_3) > 2f'(t_2)$
- 如右图, 在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, V 表示体积, 下列说法正确的是
A. $V_{B-AA_1C_1} = V_{A-BB_1C_1}$
B. $V_{A-A_1B_1C_1}, V_{A-BB_1C_1}, V_{C_1-ABC}$ 成等比数列
C. 若该三棱台存在内切球, 则 $AA_1 = BB_1 = CC_1$
D. 若该三棱台存在外接球, 则 $AA_1 = BB_1 = CC_1$



三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 为了解一个鱼塘中养殖鱼的生长情况，从这个鱼塘多个不同位置捕捞出100条鱼，分别做上记号，再放回鱼塘，几天后，再从鱼塘的多处不同位置捕捞出120条鱼，发现其中带有记号的鱼有6条，请根据这一情况来估计鱼塘中的鱼大概有_____条。
14. 在圆锥 PO 中， O 为底面圆心， PA ， PB 为圆锥的母线，且 $AB=\sqrt{2}$ ，若棱锥 $O-PAB$ 为正三棱锥，则该圆锥的侧面积为_____。
15. 已知 A ， B ， C 为 $f(x)=\sin\omega x$ 与 $g(x)=\cos\omega x$ 的交点，若 $\triangle ABC$ 为等边三角形，则正数 ω 的最小值为_____。
16. 已知 F_1 ， F_2 是椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)的左、右焦点， E 上两点 A ， B 满足 $3\overrightarrow{AF_2} = 2\overrightarrow{F_2B}$ ， $|AF_1| = 2|AF_2|$ ，则 E 的离心率为_____。

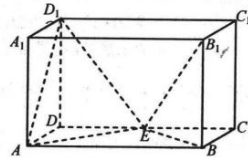
四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10分)
已知 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是公差相等的等差数列，且公差 $d > 0$ ， $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 1$ ，记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和， $a_n b_n = 2S_n$ 。
- (1) 求 a_n 和 b_n ；
- (2) 若 $c_n = \frac{1}{a_n + b_n}$ ， $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，求证： $T_n < \frac{a_n}{2b_n}$ 。

18. (12分)

在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=2AD=2$ ， E 是棱 CD 的中点。

- (1) 求证：平面 $AED_1 \perp$ 平面 BEB_1 ；
- (2) 若异面直线 EB_1 与 DC_1 所成角为 30° ，求 EB_1 与平面 AED_1 所成角的正弦值。



高三数学试卷 第3页 (共4页)

19. (12分)

在 $\triangle ABC$ 中， $AB=3$ ， $AC=2$ ， D 为 BC 边上一点，且 AD 平分 $\angle BAC$ 。

- (1) 若 $BC=3$ ，求 CD 与 AD ；
- (2) 若 $\angle ADC=60^\circ$ ，设 $\angle BAD=\theta$ ，求 $\tan\theta$ 。

20. (12分)

已知函数 $f(x)=x^3-2x^2$ ， $g(x)=32e^x$ 。

- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；
- (2) 若 $f(t)=g(s)$ ，求 $t-s$ 的最小值。

21. (12分)

甲、乙两个袋子里各有1个白球和1个黑球，每次独立地从两个袋子中随机取出1个球相互交换后放回袋中，若第 n 次交换后，甲袋中两个球颜色相同，记 $X_n=1$ ，否则， $X_n=0$ 。

- (1) 求 $X_1=0$ 的概率；
- (2) 求 $X_n=1$ 的概率；
- (3) 记 $Y=\sum_{i=1}^n X_i$ ，求 $E(Y)$ 。

22. (12分)

已知 $A(3, 1)$ ， B 是双曲线 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)上的两个点，且关于原点对称。 Γ 的两条渐近线互相垂直。

- (1) 求 Γ 的方程；
- (2) 设 P 是双曲线 Γ 上一点，直线 PA ， PB 分别与直线 $x=\frac{7}{3}$ 交于 M ， N 两点，求 $|AM|+|BN|$ 的最小值。

高三数学试卷 第4页 (共4页)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：
www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：[zizzsw](https://www.zizzs.com)。



微信搜一搜

自主选拔在线