

2021年9月广西高三开学联考 理科数学试卷

参考答案

一、选择题: 本大题共 12 小题,每小题 5 分,满分 60 分,在每小题给出的四 有一个是符合题意的.

1	2	3	4	5	6	7	8	9 10	11	12
В	С	С	В	D	С	Α	Α	A	В	В

二、填空题: 本大题共 4 小题,每小题 5 分,满分 20 分,请把答案写在答题卡上相应的位

13.
$$\left(3x^3 - \frac{2}{x}\right)^5 (x+1)$$
展开式中常数项是 240 . 14. 已知函数 $f(x) = \sqrt{x + \frac{a}{x} + 1}, \quad x \ge 1, a > 0$ 的最小值为 3 ,则 $a = \underline{\qquad}$.

17. 已知正三棱锥 P-ABC 的底面边长为 2, PA=PB=PC=2, PB, PC 中点分别为 D, E , 则直线 $AE \setminus CD$ 的夹角为 $arc \cos \frac{1}{6}$

18. 已知函数
$$f(x) = \begin{cases} e^x, x \in [-1,1) \\ -|x^2-1|+2, x \in [1,3] \end{cases}$$
, 函数 $g(x) = kx+2$, 若

三、解答题(共70分,17题10分,18-22题每题12分,解答应写出文字说明,证明过程 或演算步骤)

- 17. 已知在 $\triangle ABC$ 中,角A,B,C的对边分别为a,b,c,sinA:sinB=6:5, $cosC=\frac{1}{5}$.
 - (1) 求 cosA 的值;
 - (2) 若点线段 AB 上的一点 D 满足 $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$, 求 $\cos \angle DCB$ 的值.

(1) 因为 解:

$$\cos C = \frac{1}{5}$$

所以

官方微信公众号: zizzsw 咨询热线: 010-5601 9830 官方网站: www.zizzs.com 微信客服: zizzs2018



$$\sin C = \frac{2\sqrt{6}}{5},$$

故设 $a = 6m, b = 5m, a : b = \sin A : \sin B = 6 : 5$,

由余弦定理得

$$\cos C = \frac{(6m)^{2} + (5m)^{2} - c^{2}}{2 \times 6m \times 5m} = \frac{1}{5},$$

$$c = 7m,$$

所以

$$c=7m$$
,

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{19}{35}$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{19}{35}$$

$$\cos \angle DCB = \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{7}.$$

18. 已知数列
$$\{a_n\}$$
中, $a_1 = 1$, $a_2 = 2,2a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}$,
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 设 $b_n = \frac{1}{n(2-a_{n+1})(2-a_n)}$,求 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{i} < \frac{25}{9}$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

解: (1) 因为
$$a_1 = 1$$
, $a_2 = 2,2a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}$,

所以
$$\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}=\frac{1}{2}$$
, $a_2-a_1=1$,

所以
$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
, $n \ge 2$,

所以
$$a_n = \begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{1}{2^{n-1}}, n \ge 2, \\ 1, n = 1 \end{cases}$$

(2)
$$b_n = \frac{1}{n(2-a_{n+1})(2-a_n)} = \frac{1}{n(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n-1}})(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n})}$$

官方微信公众号: zizzsw

官方网站: www.zizzs.com

咨询热线: 010-5601 9830

微信客服: zizzs2018



$$\begin{split} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{i} &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{i-1}}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^i}\right)} \\ &\leq \frac{4}{9} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i^2 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)} \\ &< \frac{4}{9} + 4 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{25}{9}. \end{split}$$



19. 前些年,为了响应绿色环保出行,提供方便市民的交通,某市大力推行"共享单车",根据统计,近6年这个城市"共享单车"盈利数据如表:

年份代号 x	5 2	3	4	5	6
盈利 y (万元) 6	9	10	9.8	12	10

- (2) 从这 6 年中, 记单车盈利超过 9.5 (万元) 的年份数量为 X, 求 X 的分布列及期望;
- (2)从1-6这6个年份中任取两年,盈利总额小于19(万元)的概率

解: (1)

观察表格知这6年中,单车盈利超过9.5(万元)的年份数量为X,X的分布列如下:

年份代号 X	10	12
盈利 y (万元)	1/3	1/3

X的期望

$$EX = 10 \times \frac{1}{3} + 12 \times \frac{1}{3} = \frac{22}{3}$$
.

(3) 从 1-6 这 6 个年份中任取两年,盈利总额小于 18 (万元)的年份代号是 1,2; 1,3; 1,4; 1,6;

所以从1-6这6个年份中任取两年,盈利总额小于18(万元)的概率是

$$P = \frac{4}{C_6^2} = \frac{4}{15}.$$

20. 在三棱锥 S - ABC 中, $\angle ASC = \angle ABC = 90^{\circ}$, $\Delta ASC \cong \Delta CBA$, $AB = SC = \sqrt{7}$,

 $SB = \sqrt{3}$, AC = 3.

- (1) 求证: 平面 *ASC* 上平面 *ABC*;
- (2) 已知 M 是线段 AC 上一点, $AM = \frac{3}{2}$,且二面角 A SM B 的余弦值大小.

A WALL TO SALES WAS A STATE OF THE PARTY OF



解:

(1) 在三棱锥 S-ABC中, ∠ASC=∠ABC=90°,

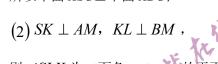
所以 $AS \perp SC$, $AB \perp BC$,

$$\triangle ASC \cong \triangle CBA$$
, $AB = SC = \sqrt{7}$, $SB = \sqrt{3}$, $AC = 3$.

所以 $AS = BC = \sqrt{2}$, 作 $SH \perp AC$, $BH \perp AC$, 得

$$SB^2 = SH^2 + HM^2 + MB^2 = 3,$$

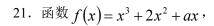
所以平面 ASC 上平面 ABC;



则 $\angle SLK$ 为二面角 A-SM-B 的平面角,

$$\tan \angle SLK = \frac{1}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}.$$

$$\cos \angle SLK = \frac{\sqrt{19}}{19}.$$



- (1) 讨论 f(x) 的单调性;
- (2) 当 a>0 时,设 f'(x)=0 的零点个数为 2,且零点 x_1 , x_2 满足: $x_1^3+x_2^3=2$,

求函数 $g(x) = ax^2 - \ln x + 1, -1 \le x \le 2$ 的最大值.

解: (1)
$$f'(x) = 3x^2 + 4x + a$$
,
$$\Delta = 16 - 12a$$

$$\Delta = 16 - 12a$$

若 $a > \frac{4}{3}$,则 $\Delta < 0$, f'(x) < 0; f(x) 单调递减; 若 $a = \frac{4}{3}$,则 $\Delta = 0$, $f'(x) \ge 0$; f(x) 单调递增;

若
$$a = \frac{4}{3}$$
, 则 $\Delta = 0$, $f'(x) \ge 0$; $f(x)$ 单调递增:

若
$$a < \frac{4}{3}$$
,则 $\Delta > 0$, 当 $x \le \frac{-2 - \sqrt{4 - 3a}}{3}$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

官方微信公众号: zizzsw

官方网站: www.zizzs.com

咨询热线: 010-5601 9830

微信客服: zizzs2018



当
$$\frac{-2-\sqrt{4-3a}}{3} \le x \le \frac{-2+\sqrt{4-3a}}{3}, f'(x) < 0, f(x)$$
单调递减;

当
$$x \ge \frac{-2 + \sqrt{4 - 3a}}{3}$$
, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 準调递增.

设 f'(x)=0 的零点个数为 2,且零点 x_1 , x_2 满足: $x_1^3+x_2^3=2$,所以 $a=\frac{40}{9}$.

所以
$$a = \frac{40}{9}$$
.

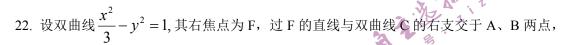
$$g'(x) = 2ax - \frac{1}{x} + 1 > 0, -1 \le x \le 2;$$

g(x)单调递增;

$$g(x) \le g(2) = 4a - \ln 2 + 1 = \frac{169}{9} - \ln 2.$$

函数 $g(x) = ax^2 - \ln x + 1, -1 \le x \le 2$ 的最大值为





- (1) 求直线的斜率;
- (2) 求 AB 中点的轨迹坐标方程.

解: (1) 设直线方程为
$$y = kx - 2k$$
, 代入方程 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$, 得

$$(3k^2 - 1)x^2 - 12k^2x + 12k^2 + 3 = 0,$$

设
$$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$$
,则 $x_1 + x_2 = \frac{12k^2}{3k^2 - 1} > 0, x_1x_2 = \frac{3}{3k^2 - 1} > 0$,

$$\Delta = 144k^4 - 4(3k^2 - 1)(12k^2 + 3) = 3k^2 + 3 > 0$$
,

所以
$$k \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$$
.

(2) 设AB中点为 (x_0, y_0) ,

官方微信公众号: zizzsw

咨询热线: 010-5601 9830 官方网站: www.zizzs.com 微信客服:zizzs2018



$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{6k^2}{3k^2 - 1}$$
, $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = kx_0 - 2k = \frac{2k}{3k^2 - 1}$,

$$(x_0 - 1)^2 + 3y_0^2 = 1.$$

所以 AB 中点的轨迹坐标方程为

$$(x-1)^2 + 3y^2 = 1.$$









官方微信公众号: zizzsw 咨询热线: 010-5601 9830 官方网站: www.zizzs.com

微信客服: zizzs2018