# 2021年9月广西高三开学联考

# 理科数学试卷

## 参考答案

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，满分60分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题意的.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | C | C | B | D | C | A | A | C | A | B | B |

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，满分20分，请把答案写在答题卡上相应的位置.

13. $\left(3x^3-\dfrac{2}{x}\right)^5(x+1)$展开式中常数项是____240____.

14. 已知函数$f(x)=\sqrt{x+\dfrac{a}{x}+1}$，$x\geq1,a>0$的最小值为$3$，则$a=$____16____.

17. 已知正三棱锥$P-ABC$的底面边长为2，$PA=PB=PC=2$，$PB$，$PC$中点分别为$D,E$，则直线$AE$、$CD$的夹角为__$\arccos\dfrac{1}{6}$__.

18. 已知函数$f(x)=\begin{cases}e^x,x\in[-1,1)\\-|x^2-1|+2,\ x\in[1,3]\end{cases}$，函数$g(x)=kx+2$，若$f(x)=g(x)$，$x\in[-1,3]$恰有两个零点，则$k^2+2k$的取值范围是____. $\left[-1,\dfrac{16}{9}\right]$

**三、解答题（共70分，17题10分，18-22题每题12分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）**

17．已知在△*ABC*中，角*A*，*B*，*C*的对边分别为*a*，*b*，*c*，*sinA:sinB=6:5,*cos*C*=$\dfrac{1}{5}$.

（1）求cosA的值；

（2）若点线段AB上的一点$D$满足$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DB}=0$，求$\cos\angle DCB$的值.

解：（1）因为

$$\cos C=\frac{1}{5},$$

所以

$$\sin C=\frac{2\sqrt{6}}{5},$$

故设$a=6m,b=5m,a:b=\sin A:\sin B=6:5$，

由余弦定理得

$$\cos C=\frac{(6m)^2+(5m)^2-c^2}{2\times 6m\times 5m}=\frac{1}{5},$$

所以

$$c=7m,$$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{19}{35}$$

$$\cos\angle DCB=\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{7}.$$

18. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=2,2a_{n+1}=3a_n-a_{n-1}$，

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=\dfrac{1}{n(2-a_{n+1})(2-a_n)}$，求$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{b_i}{i}<\dfrac{25}{9}$.

解：（1）因为$a_1=1$，$a_2=2,2a_{n+1}=3a_n-a_{n-1}$，

所以$\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}=\dfrac{1}{2}$，$a_2-a_1=1$,

所以$a_{n+1}-a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$，$n\geq 2$，

所以$a_n=\begin{cases}\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2^{n-1}},n\geq 2,\\ 1,n=1\end{cases}$，

（2）$b_n=\dfrac{1}{n(2-a_{n+1})(2-a_n)}=\dfrac{1}{n\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^n}\right)}$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{b_i}{i}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{i-1}}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^i}\right)}$$

$$\le\frac{4}{9}+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{i^2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$<\frac{4}{9}+4\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{25}{9}.$$

19. 前些年，为了响应绿色环保出行，提供方便市民的交通，某市大力推行“共享单车”，根据统计，近 6 年这个城市“共享单车”盈利数据如表：

| 年份代号 $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 盈利 $y$（万元） | 6 | 9 | 10 | 9.8 | 12 | 10 |

（2）从这 6 年中，记单车盈利超过 9.5（万元）的年份数量为 $X$，求 $X$ 的分布列及期望；

（2）从 1-6 这 6 个年份中任取两年，盈利总额小于 19（万元）的概率

解：（1）

观察表格知这 6 年中，单车盈利超过 9.5（万元）的年份数量为 $X$，$X$ 的分布列如下：

| 年份代号 X | 10 | 12 |
|---|---|---|
| 盈利 $y$（万元） | 1/3 | 1/3 |

$X$ 的期望

$$EX=10\times\frac{1}{3}+12\times\frac{1}{3}=\frac{22}{3}.$$

（3）从 1-6 这 6 个年份中任取两年，盈利总额小于 18（万元）的年份代号是

1,2；1,3；1,4；1,6；

所以从 1-6 这 6 个年份中任取两年，盈利总额小于 18（万元）的概率是

$$P=\frac{4}{C_6^2}=\frac{4}{15}.$$

20. 在三棱锥 $S-ABC$ 中，$\angle ASC=\angle ABC=90°$，$\Delta ASC\cong\Delta CBA$，$AB=SC=\sqrt{7}$，$SB=\sqrt{3}$，$AC=3$.

（1）求证：平面 $ASC\perp$ 平面 $ABC$；

（2）已知 M 是线段 AC 上一点，$AM=\frac{3}{2}$，且二面角 A－SM－B 的余弦值大小.

解：

（1）在三棱锥 $S-ABC$ 中，$\angle ASC=\angle ABC=90°$，

所以 $AS\perp SC, AB\perp BC$，

$\Delta ASC\cong\Delta CBA$，$AB=SC=\sqrt{7}$，$SB=\sqrt{3}$，$AC=3$.

所以 $AS=BC=\sqrt{2}$，作 $SH\perp AC$，$BH\perp AC$，得

$SB^2=SH^2+HM^2+MB^2=3$，

所以平面 $ASC\perp$ 平面 $ABC$；

(2) $SK\perp AM$，$KL\perp BM$，

则 $\angle SLK$ 为二面角 A-SM-B 的平面角，

$$\tan\angle \mathrm{SLK}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{6}}=3\sqrt{2}.$$

$$\cos\angle SLK=\frac{\sqrt{19}}{19}.$$

21．函数 $f(x)=x^3+2x^2+ax$，

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 a＞0 时，设 $f'(x)=0$ 的零点个数为 2，且零点 $x_1$，$x_2$ 满足：$x_1^3+x_2^3=2$，

求函数 $g(x)=ax^2-\ln x+1, -1\le x\le 2$ 的最大值.

解：（1）$f'(x)=3x^2+4x+a$，

$\Delta=16-12a$

若 $a>\frac{4}{3}$，则 $\Delta<0$，$f'(x)<0$；$f(x)$单调递减；

若 $a=\frac{4}{3}$，则 $\Delta=0$，$f'(x)\ge 0$；$f(x)$单调递增；

若 $a<\frac{4}{3}$，则 $\Delta>0$，当 $x\le\frac{-2-\sqrt{4-3a}}{3}$，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

当$\frac{-2-\sqrt{4-3a}}{3}\le x\le\frac{-2+\sqrt{4-3a}}{3}$, $f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当$x\ge\frac{-2+\sqrt{4-3a}}{3}$, $f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

(2) 当 a>0 时，

设 $f'(x)=0$ 的零点个数为 2，且零点 $x_1$，$x_2$ 满足：$x_1^3+x_2^3=2$，

所以 $a=\frac{40}{9}$.

$g'(x)=2ax-\frac{1}{x}+1>0,-1\le x\le 2$；

$g(x)$ 单调递增；

$g(x)\le g(2)=4a-\ln 2+1=\frac{169}{9}-\ln 2.$

函数 $g(x)=ax^2-\ln x+1,-1\le x\le 2$ 的最大值为

$\frac{169}{9}-\ln 2.$

22. 设双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$, 其右焦点为 F，过 F 的直线与双曲线 C 的右支交于 A、B 两点，

（1）求直线的斜率；

（2）求 AB 中点的轨迹坐标方程.

解：（1）设直线方程为 $y=kx-2k$，代入方程 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$, 得

$(3k^2-1)x^2-12k^2x+12k^2+3=0,$

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{12k^2}{3k^2-1}>0,x_1x_2=\frac{3}{3k^2-1}>0$，

$\Delta=144k^4-4(3k^2-1)(12k^2+3)=3k^2+3>0$，

所以 $k\in\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right).$

（2）设 AB 中点为$(x_0，y_0)$，

$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{6k^2}{3k^2-1}$， $y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=kx_0-2k=\frac{2k}{3k^2-1}$，

$(x_0-1)^2+3y_0^2=1$.

所以 AB 中点的轨迹坐标方程为

$(x-1)^2+3y^2=1$.