雅礼中学2020届高三月考试卷(六)

数学(文科)参考答案

一、选择题

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答　案	D	D	D	B	B	A	B	B	D	A	A	D

1.D **【解析】**因为 $A=\{x|1<x<3\}$,$B=\{y|y=x-2,x\in A\}=\{y|-1<y<1\}$,所以 $A\cap B=\varnothing$,故选 D.

2.D **【解析】**形如 $a+b\mathrm{i}(a\in\mathbf{R},b\in\mathbf{R})$的数叫做复数,$a$ 和 b 分别叫它的实部和虚部,所以复数 $z=1-2\mathrm{i}$ 的虚部为-2.故选 D.

3.D **【解析】**$\because f(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,且在$(-\infty,0]$上为减函数,$\therefore f(x)$在$[0,+\infty)$上为增函数,

$\because \log_2 5>\log_2 4=2>2^{0.3}>2^0=1>0.3^2>0$,

$\therefore f(\log_2 5)>f(2^{0.3})>f(0.3^2)$,即 $a<c<b$.本题正确选项 D.

4.B **【解析】**由题意,实数 x,y 满足 $x+y>0$,若 $x>0$,则未必有 $x^2>y^2$,

例如 $x=1,y=2$ 时,有 $x^2<y^2$;

反之,若 $x^2>y^2$,则 $x^2-y^2>0$,即$(x+y)(x-y)>0$;

由于 $x+y>0$,故 $x-y>0$,$\therefore x>y$ 且 $x>-y$,$\therefore x>0$ 成立;

所以当 $x+y>0$ 时,"$x>0$" $\not\Rightarrow$ "$x^2>y^2$",但"$x^2>y^2$"$\Rightarrow$"$x>0$";

$\therefore$"$x>0$"是"$x^2>y^2$"的必要不充分条件.答案 B.

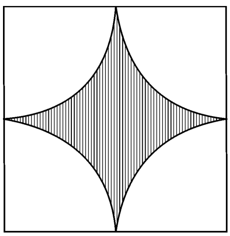
5.B **【解析】**因为在长方形 $ABCD$ 中,$AB=2$,$AD=1$,点 E 为 BC 的中点,点 F 为 CD 的中点,

所以$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,

$\therefore \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=-2+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$.

故选 B.

6.A **【解析】**如下图所示,由于小虫到每个顶点的距离不小于 1 为安全区域,



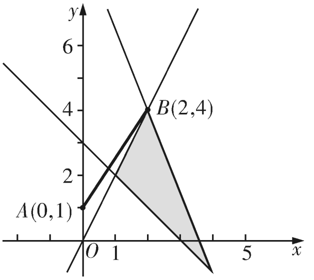
则安全区域为以正方形每个顶点为圆心,半径为 1 的扇形弧以及扇形以外的部分,为图中阴影部分,

其面积 $S=2\times2-\pi\times1^2=4-\pi$,故概率 $P=\frac{4-\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}$.故选 A.

7.B **【解析】**由条件知$\frac{2\pi}{\omega}=\pi\Rightarrow\omega=2$,$f(x)=2\sin(2x+\varphi)\Rightarrow g(x)=2\sin\left(2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\varphi\right)=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)$关于 y 轴对称,可得 $g(0)=\pm2$,可得 $\varphi=-\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$.因为 $0<\varphi<\pi$,所以 $\varphi=\frac{5\pi}{6}$,故得 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)$,当 $x=\frac{\pi}{3}$时,$f(x)=-2$.对称中心为:$\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{5\pi}{12},0\right)$,因为 $k\in\mathbf{Z}$,C,D,均不正确.故选 B.

8. B 【解析】直线 $kx-y+1=0$ 过定点 $A(0,1)$，

作可行域如图所示，



由 $\begin{cases}5x+2y-18=0\\2x-y=0\end{cases}$，得 $B(2,4)$.

当定点 $A(0,1)$ 和 B 点连接时，斜率最大，此时 $k=\dfrac{4-1}{2-0}=\dfrac{3}{2}$，

则 k 的最大值为 $\dfrac{3}{2}$. 故选 B.

9. D 【解析】因为：$\dfrac{a_2+a_{20}}{b_7+b_{15}}=\dfrac{a_1+a_{21}}{b_1+b_{21}}=\dfrac{\dfrac{21}{2}(a_1+a_{21})}{\dfrac{21}{2}(b_1+b_{21})}=\dfrac{S_{21}}{T_{21}}=\dfrac{7\times21+2}{21+3}=\dfrac{149}{24}$. 故选 D.

10. A 【解析】由题意，三个实数 $2,b,8$ 成等比数列，可得 $b^2=16$，

即双曲线 $\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{16}=1$ 的渐近线方程为 $3x\pm4y=0$，故选 A.

11. A 【解析】定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

且 $f(-2)=1$，可得 $f(2)=f(-2)=1$，

$f(x-2)\leqslant1$，即为 $f(|x-2|)\leqslant f(2)$，

可得 $|x-2|\leqslant2$，

即 $-2\leqslant x-2\leqslant2$，

解得 $0\leqslant x\leqslant4$，

即 x 的取值范围是 $[0,4]$，故选 A.

12. D 【解析】不妨设 $f(x_1)=g(x_2)=a$，

$\therefore e^{x_1}-e=\ln x_2+1=a$，

$\therefore x_1=\ln(a+e)$，$x_2=e^{a-1}$，

故 $x_1-x_2=\ln(a+e)-e^{a-1}$，$(a>-e)$.

令 $h(a)=\ln(a+e)-e^{a-1}$，

$h'(a)=\dfrac{1}{a+e}-e^{a-1}$，

易知 $h'(a)$ 在 $(-e,+\infty)$ 上是减函数，

且 $h'(0)=0$，

故 $h(a)$ 在 $a=0$ 处有最大值，

即 x_1-x_2 的最大值为 $1-\dfrac{1}{e}$；故选 D.

二、填空题

13. $\frac{1}{3}$ 【解析】由诱导公式可知 $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1}{3}$. 故本题填$\frac{1}{3}$.

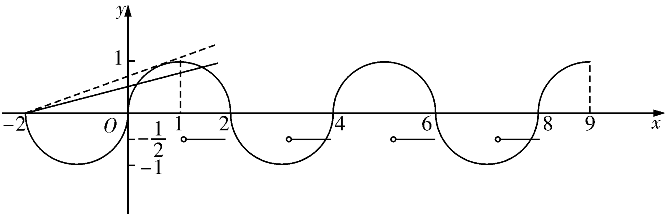
14. $2\sqrt{2}$ 【解析】由向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为$\frac{3\pi}{4}$,$\boldsymbol{a}=(-3,4)$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-10$,

得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{3\pi}{4}=-10$,即$|\boldsymbol{b}|=\dfrac{-10}{-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{(-3)^2+4^2}}=2\sqrt{2}$,故答案为:$2\sqrt{2}$.

15. 1 【解析】直角$\triangle ABC$ 的斜边 CB 为$\triangle ABC$ 所在截面小圆的直径,则该截面小圆的半径为 $r=\sqrt{2}$,由球的表面积为 12π 可得球的半径 $R=\sqrt{3}$,球心 O 到平面 ABC 的距离 $d=\sqrt{R^2-r^2}=1$.

16. $\left[\frac{1}{3},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ 【解析】当 $x\in(0,2]$时,$f(x)=\sqrt{1-(x-1)^2}$,即$(x-1)^2+y^2=1,y\geqslant 0$.

又 $f(x)$为奇函数,其图象关于原点对称,其周期为 4,如图,函数 $f(x)$与 $g(x)$的图象,要使 $f(x)=g(x)$在$(0,9]$上有 8 个实根,只需二者图象有 8 个交点即可.



当 $g(x)=-\frac{1}{2}$时,函数 $f(x)$与 $g(x)$的图象有 2 个交点;

当 $g(x)=k(x+2)$时,$g(x)$的图象为恒过点$(-2,0)$的直线,只需函数 $f(x)$与 $g(x)$的图象有 6 个交点. 当 $f(x)$与 $g(x)$图象相切时,圆心$(1,0)$到直线 $kx-y+2k=0$ 的距离为 1,即$\frac{|k+2k|}{\sqrt{1+k^2}}=1$,得 $k=\frac{\sqrt{2}}{4}$,函数 $f(x)$与 $g(x)$的图象有 3 个交点;当 $g(x)=k(x+2)$过点$(1,1)$时,函数 $f(x)$与 $g(x)$的图象有 6 个交点,此时 $1=3k$,得 $k=\frac{1}{3}$.

综上可知,满足 $f(x)=g(x)$在$(0,9]$上有 8 个实根的 k 的取值范围为$\left[\frac{1}{3},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

三、解答题

17.【解析】(1)$\because A+B+C=\pi$,

$\therefore 4\cos^2\frac{A}{2}-\cos 2(B+C)=2(1+\cos A)-\cos 2A=-2\cos^2 A+2\cos A+3=\frac{7}{2}$,

$\therefore 2\cos^2 A-2\cos A+\frac{1}{2}=0$. $\therefore \cos A=\frac{1}{2}$,

$\because 0<A<\pi$,$\therefore A=60^\circ$. …………………………………………………………………… 6 分

(2)由余弦定理 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,得

$bc=b^2+c^2-a^2$. $\therefore a^2=(b+c)^2-3bc=9-3bc\geqslant 9-3\left(\frac{b+c}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$,

$\therefore a\geqslant\frac{3}{2}$. 所以 a 的最小值为$\frac{3}{2}$,

当且仅当 $b=c=\frac{3}{2}$时取等号. ………………………………………………………………… 12 分

18.【解析】(1)该组数据的平均数 $\overline{x}=6\times0.03+7\times0.1+8\times0.2+9\times0.35+10\times0.19+11\times0.09+12\times0.04=9$,

因为 $0.03+0.1+0.2+0.35=0.68>0.5$,所以中位数 $a\in[8.5,9.5)$,

由 $0.03+0.1+0.2+(a-8.5)\times0.35=0.5$,解得 $a=\dfrac{0.5-0.33}{0.35}+8.5\approx8.99$;………………………… 4 分

(2)(ⅰ)每周阅读时间为[6.5,7.5)的学生中抽取 3 名,每周阅读时间为[7.5,8.5)的学生中抽取 6 名.

理由:每周阅读时间为[6.5,7.5)与每周阅读时间为[7.5,8.5)是差异明显的两层,为保持样本结构与总体结构的一致性,提高样本的代表性,宜采用分层抽样的方法抽取样本;因为两者频率分别为 0.1,0.2,所以按照 1∶2 进行名额分配. ………………………………………………………………………… 8 分

(ⅱ)由频率分布直方图可知,阅读时间不足 8.5 小时的学生共有 $200\times(0.03+0.1+0.2)=66$ 人,不少于 8.5 小时的共有 $200-66=134$ 人.

于是列联表为:

	阅读时间不足 8.5 小时	阅读时间不少于 8.5 小时
理工类专业	40	60
非理工类专业	26	74

K^2 的观测值 $k=\dfrac{200\times(40\times74-26\times60)^2}{66\times134\times100\times100}\approx4.432>3.841$,

所以有 95%的把握认为学生阅读时间不足与“是否理工类专业”有关. ……………………………… 12 分

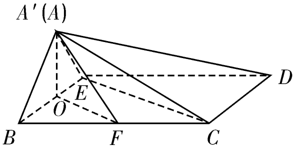
19.【解析】(1)$EC=2\sqrt{3}$,$\therefore BE^2+EC^2=BC^2$,即 $BE\perp EC$,

$\because CD/\!/BE$,$\therefore CD\perp EC$,

O 为 BE 中点,F 为 BC 中点.$\therefore OF/\!/EC$,$\therefore CD\perp OF$.

$\because A'B=A'E$,O 为 BE 中点,$\therefore A'O\perp BE$,$\therefore A'O\perp CD$.

而 $A'O\cap OF=O$,$\therefore CD\perp$ 平面 $A'OF$. ………………………………………………………… 6 分



(2)$OF/\!/EC$,$\therefore$点 F 到平面 $A'EC$ 的距离即为点 O 到平面 $A'EC$ 的距离,

即点 B 到平面 $A'EC$ 的距离的一半.

取 $A'E$ 的中点记为 H,连结 BH,则 $BH\perp A'E$,

$\because$平面 $A'BE\perp$平面 $BCDE$,且交线为 BE,

由(1)知 $EC\perp BE$,

$\therefore EC\perp$平面 $A'BE$,$\therefore EC\perp BH$,

又 $EC\cap A'E=E$,

$\therefore BH\perp$平面 $A'EC$,$BH=\sqrt{3}$,

$\therefore B$ 到平面 $A'EC$ 的距离为$\sqrt{3}$,

$\therefore$点 F 到平面 $A'EC$ 的距离为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)由题意得$\begin{cases}\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1,\\ e=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\end{cases}$解得 $a^2=8,b^2=2$,所以椭圆的方程为 $C:\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$. ……… 4 分

(2)设直线 $l:y=\dfrac{1}{2}x+m$,由$\begin{cases}y=\dfrac{1}{2}x+m\\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}$,消去 y 得,$x^2+2mx+2m^2-4=0$,$\Delta=4m^2-8m^2+16>0$,

解得 $-2<m<2$,当 $m=0$ 时,$y=\dfrac{1}{2}x$(舍).

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=-2m$,$x_1\cdot x_2=2m^2-4$,

由题意,易知 PA 与 PB 的斜率存在,所以 $\alpha,\beta\neq\dfrac{\pi}{2}$,设直线 PA 与 PB 的斜率分别为 k_1,k_2,

则 $\tan\alpha=k_1$,$\tan\beta=k_2$,要证 $\alpha+\beta=\pi$,即证 $\tan\alpha=\tan(\pi-\beta)=-\tan\beta$,只需证 $k_1+k_2=0$.

$\because k_1=\dfrac{y_1-1}{x_1-2}$,$k_2=\dfrac{y_2-1}{x_2-2}$,

故 $k_1+k_2=\dfrac{y_1-1}{x_1-2}+\dfrac{y_2-1}{x_2-2}=\dfrac{(y_1-1)(x_2-2)+(y_2-1)(x_1-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}$,

又 $y_1=\dfrac{1}{2}x_1+m$,$y_2=\dfrac{1}{2}x_2+m$,

所以 $(y_1-1)(x_2-2)+(y_2-1)(x_1-2)=\left(\dfrac{1}{2}x_1+m-1\right)(x_2-2)+\left(\dfrac{1}{2}x_2+m-1\right)(x_1-2)$

$=x_1\cdot x_2+(m-2)(x_1+x_2)-4(m-1)=2m^2-4+(m-2)(-2m)-4(m-1)=0$,

$\therefore k_1+k_2=0$,$\alpha+\beta=\pi$. ……………………………………………………………………… 12 分

21.【解析】(1)由 $f(x)=e^x-a\ln x$,则 $f'(x)=e^x-\dfrac{a}{x}$,$f'(1)=e-a$.切点为 $(1,e)$,

所求切线方程为 $y-e=(e-a)(x-1)$,即 $(e-a)x-y+a=0$. ……………………………………………… 4 分

(2)由 $f(x)=e^x-a\ln x$,原不等式即为 $e^x+\ln x-e-m(x-1)>0$.

记 $F(x)=e^x+\ln x-e-m(x-1)$,$F(1)=0$,

依题意有 $F(x)>0$ 对任意 $x\in(1,+\infty)$恒成立,

求导得 $F'(x)=e^x+\dfrac{1}{x}-m$,$F'(1)=e+1-m$,$F''(x)=e^x-\dfrac{1}{x^2}$,

当 $x>1$ 时,$F''(x)>0$,则 $F'(x)$在 $(1,+\infty)$上单调递增,有 $F'(x)>F'(1)$.

若 $m\leqslant e+1$,符合题意;

若 $m>e+1$,则 $F'(1)<0$,又 $F'(\ln m)=\dfrac{1}{\ln m}>0$,故存在 $x_1\in(1,\ln m)$使 $F'(x_1)=0$;

当 $1<x<x_1$ 时,$F'(x)<0$,得 $F(x)$在 $(1,x_1)$上单调递减,在 $F(x)<F(1)=0$,舍去,

综上,实数 m 的取值范围是 $m\leqslant e+1$. …………………………………………………………… 12 分

22.【解析】(1)由题意可知直线 l 的直角坐标方程为 $y=\sqrt{3}x+2$,

曲线 C 是圆心为 $(\sqrt{3},1)$,半径为 r 的圆,直线 l 与曲线 C 相切,可得:$r=\dfrac{|\sqrt{3}\times\sqrt{3}-1+2|}{2}=2$;

可知曲线 C 的方程为 $(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=4$,

$\therefore$曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2-2\sqrt{3}\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta=0$,

即 $\rho=4\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$. ………………………………………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)不妨设 $M(\rho_1,\theta)$,$N\left(\rho_2,\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$,$(\rho_1>0,\rho_2>0)$,

$S_{\triangle MON}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OM}||\overrightarrow{ON}|\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{4}\rho_1\cdot\rho_2=4\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=2\sin\theta\cos\theta+2\sqrt{3}\cos^2\theta$

$=\sin 2\theta+\sqrt{3}\cos 2\theta+\sqrt{3}=2\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}$.

当 $\theta=\dfrac{\pi}{12}$时,$S_{\triangle MON}$最大为 $2+\sqrt{3}$,

$\therefore\triangle MON$ 面积的最大值为 $2+\sqrt{3}$. ……………………………………………………………… 10 分

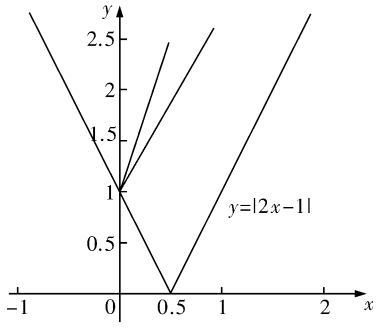
23.【解析】(1)当 $k=1$ 时,不等式化为 $|x|-|2x-1|>0$,

$\begin{cases}x\leqslant 0,\\ -x+2x-1>0,\end{cases}$或$\begin{cases}0<x<\dfrac{1}{2},\\ x+2x-1>0,\end{cases}$或$\begin{cases}x\geqslant\dfrac{1}{2},\\ x-2x+1>0,\end{cases}$

综上,原不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{3}<x<1\right\}$. ………………………………………………………… 5 分

(2)$x\in(0,+\infty)$时,$f(x)+b>0$,$k|x|+b>|2x-1|$,

作 $y=|2x-1|$ 与 $y=k|x|+b$ 的图象,



可知 $k\geqslant 2$,$b\geqslant 1$,

$\therefore k+b\geqslant 3$,$k+b$ 的最小值为 3(这时 $k=2$,$b=1$). ……………………………………………… 10 分