中学生标准学术能力诊断性测试
数学（文科）科目参考答案

一．选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	B	C	B	A	A	C	C	D	A	C

二. 填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $-\dfrac{7\sqrt{2}}{5}$　　14. 7　　15. $\dfrac{64\pi}{3}$　　16. $\left(-\dfrac{1}{e},0\right)$

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明. 证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22. 23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：60 分。

17．解：（Ⅰ）由 $2a_1+3a_2=33, a_2a_4=27a_3$ 得 $a_1=3, q=3$ $\therefore a_n=3^n$ ……………（3 分）

$b_n=\log_3 a_{n+1}$,则 $b_n=n+1$ ……………（5 分）

（Ⅱ）$c_n=(n+1)3^n$ ……………（6 分）

记 $S_n=2\times3+3\times3^2+4\times3^3+\cdots+(n+1)3^n$

$3S_n=2\times3^2+3\times3^3+4\times3^4+\cdots+(n+1)3^{n+1}$ ……………（9 分）

$\therefore\ -2S_n=6+(3^2+3^3+\cdots+3^n)-(n+1)3^{n+1}$

化简得 $S_n=\dfrac{(2n+1)3^{n+1}}{4}-\dfrac{3}{4}$ ……………（12 分）

18.（Ⅰ）∵点 B_1 在底面 ABC 上的射影 D 落在 BC 上,

∴B_1D⊥平面 ABC,∵AC⊂平面 ABC,∴B_1D⊥AC, ……………（3 分）

又∠ACB=90°,∴BC⊥AC,

又 B_1D∩BC=D, $B_1D, BC\subset$平面BB_1C_1C ∴AC⊥平面 BB_1C_1C. …………6 分

（Ⅱ）∵B_1D⊥平面 ABC,∴B_1D⊥BC,又 $BD=\dfrac{a}{3}$,$B_1B=AA_1=a$,

$\therefore B_1D=\sqrt{BB_1^2-BD^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}a$,

$\therefore$四边形 B_1BCC_1 的面积 $S_{四边形B_1BCC_1}=a\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}a=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}a^2$,

$\therefore S_{\Delta B_1BC_1}=\dfrac{1}{2}S_{四边形B_1BCC_1}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}a^2$.…………（9 分）

$\because V_{B_1-AA_1C_1}=V_{B_1-ACC_1}=V_{A-B_1CC_1}=V_{A-BB_1C_1}$,

由（Ⅰ）知 AC⊥平面 BB_1C_1C,故三棱锥 A-B_1BC_1 的高为 $AC=a$,

$\therefore V_{B_1-AA_1C_1}=V_{A-BB_1C_1}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{3}a^2\times a=24\sqrt{2}$.

$\therefore a=6$…………（12 分）

19.（Ⅰ）根据题中条件,对两变量进行分类,则数学“优”的有 4 人,“一般”的有 4 人;物理“优”的有 6 人,“一般”的有 2 人.

列联表如下:

	优	一般	合计
数学	4	4	8
物理	6	2	8
合计	10	6	16

则 $K^2=\frac{16\times(2\times4-4\times6)^2}{8\times8\times10\times6}\approx1.067<2.706$，…………（4 分）

显然,没有 90%的把握认为数学“优”与物理“优”有关.…………（6 分）

（Ⅱ）由已知数表可以看出,物理或数学分数在 80 分以上的同学共 6 人,其中 4 人的物理与数学分数都在 80 分以上,设这 4 人分别为 A_1,A_2,A_3,A_4,另外 2 人为 B_1,B_2,则从中任选 2 人的所有基本事件为

$A_1A_2,A_1A_3,A_1A_4,A_1B_1,A_1B_2$,

$A_2A_3,A_2A_4,A_2B_1,A_2B_2$,

A_3A_4,A_3B_1,A_3B_2,

A_4B_1,A_4B_2,

B_1B_2,

共 15 个, …………（9 分）

记“这 2 名同学的数学与物理分数恰好都在 80 分以上”为事件 M,则 M 所包含的基本事件为

A_1A_2,A_1A_3,A_1A_4,

A_2A_3,A_2A_4,

A_3A_4. 共 6 个. 故 $P(M)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$，于是,这 2 名同学的数学与物理分数恰好都在 80 分以上的概率为 $\frac{2}{5}$.…………12 分

20.（Ⅰ） 解: 设抛物线 C 的方程是 $x^2=ay$,则 $\frac{a}{4}=1$, 即 $a=4$.

故所求抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$. ……………………(4 分)

（Ⅱ）解: 设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$,

直线 PQ 的方程是 $y=-\frac{1}{2}x+b$.

将上式代入抛物线 C 的方程，得

$x^2+2x-4b=0$,

故 $x_1+x_2=-2$, $x_1x_2=-4b$,…………………(6 分)

所以 $y_1y_2=b^2$， $y_1+y_2=1+2b$，

而 $\overrightarrow{FP}=(x_1, y_1-1)$, $\overrightarrow{FQ}=(x_2, y_2-1)$,

$\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}=x_1x_2+(y_1-1)(y_2-1)$

$=x_1x_2+y_1y_2-(y_1+y_2)+1$

$=-4b+b^2-(1+2b)+1$

$=b^2-6b=0$

$\therefore$ $b=6$ 或 $b=0$（舍去）…………（8 分）

$\therefore$ $x_1=4$， $y_1=4$

即点 P 的坐标是(4,4)．…………………(10 分)

所以抛物线 C 在点 P 处的切线方程为 $y-4=2(x-4)$，即 $2x-y-4=0$…………(12 分)

21.（Ⅰ） $f'(x)=\ln x+1$ …… （1 分）

$\therefore f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{e})$ 为减函数，在 $(\frac{1}{e},+\infty)$ 为增函数

① 当 $0<t<\frac{1}{e}$ 时， $f(x)$ 在 $[t,\frac{1}{e})$ 为减函数，在 $[\frac{1}{e},t+1]$ 为增函数，

$\therefore f(x)_{\min}=f(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$ …… （3 分）

②当 $t\geq\frac{1}{e}$ 时， $f(x)$ 在 $[t,t+1]$ 为增函数，$\therefore f(x)_{\min}=f(t)=t\ln t$ …… （6 分）

（Ⅱ）由题意可知，$2x\ln x+x^2-ax+3\geq0$ 在 $[\frac{1}{e^2},e^2]$ 上恒成立，即

$a\leq\frac{2x\ln x+x^2+3}{x}=2\ln x+x+\frac{3}{x}$ 在 $[\frac{1}{e^2},e^2]$ 上恒成立，

令 $h(x)=2\ln x+x+\frac{3}{x}$，即 $a\leq h(x)_{\min}$ …… （8 分）

$\because h'(x)=\frac{2}{x}+1-\frac{3}{x^2}=\frac{x^2+2x-3}{x^2}=\frac{(x+3)(x-1)}{x^2}$

$\therefore h(x)$ 在 $(0,1)$ 为减函数，在 $(1,+\infty)$ 为增函数，则在 $(\frac{1}{e^2},1)$ 为减函数，在 $(1,e^2)$ 为增函数 …… （10 分）

$\therefore a\leq h(x)_{\min}=h(1)=4$ …… 12 分

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22.23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第

一题计分。作答时请写清题号。

22.（本小题满分 10 分）【选修 4-4：坐标系与参数方程】

解：（Ⅰ）C：$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$，轨迹为椭圆，

其焦点为 $F_1(-1,0)$，

∴直线 AB 的方程为：$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$，……（2 分）

联立可得，$2x^2+3\cdot\frac{1}{3}(x+1)^2=6$.，化简得，$3x^2+2x-5=0$

可得交点坐标为 $\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right),\left(-\frac{5}{3},-\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ ……（5 分）

（Ⅱ）直线 AB 的参数方程为 $\begin{cases}x=-1+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数），

上式代入椭圆 C 的方程式中得：$\left(2\cos^2\alpha+3\sin^2\alpha\right)t^2-4\cos\alpha t-4=0$，……（7 分）

$\therefore |PA|\cdot|PB|=|t_1t_2|=\frac{4}{2\cos^2\alpha+3\sin^2\alpha}=\frac{8}{5}$，

可得 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $\alpha=45^\circ$ 或 135°， 所以直线 l 的斜率为 ±1 ……（10 分）

23.（Ⅰ）当 $a=1$，$f(x)=|2x-1|+|x+3|$

当 $x\le-3$ 时，原不等式化为 $-3x-2\ge2x+4$，得 $x\le-3$.……（2 分）

当 $-3<x\le\frac{1}{2}$ 时，原不等式化为 $4-x\ge2x+4$，得 $-3<x\le0$.……（3 分）

当 $x>\frac{1}{2}$ 时，原不等式化为 $3x+2\ge2x+4$，得 $x\ge2$.……（4 分）

综上，不等式 $f(x)\ge g(x)$ 的解集为 $\{x|x\le0$ 或 $x\ge2\}$……（5 分）

（Ⅱ）当 $x\in[-3,\frac{a}{2})$ 时，$f(x)=-x+a+3$

不等式 $f(x)\ge g(x)$ 化为 $-x+a+3\ge2x+4$.

所以 $3x\le a-1$ 对 $x\in[-3,\frac{a}{2})$ 都成立. ……（7 分）

故 $\frac{3a}{2}\le a-1$，即 $a\le-2$. 综上，a 的取值范围为 $-6<a\le-2$.………………（10 分）