辽宁 2022—2023 学年度高考适应性测试

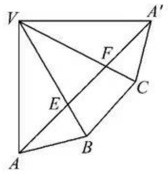
数学参考答案及评分意见

1.B 【解析】由题意：$a+\frac{2i}{1-i}=a+\frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=a-1+i$，满足题意时 $a-1=0$，解得 $a=1$.故选 B.

2.C 【解析】$A=\{x|x<0\}$，$B=\{x|x>1\}$，$\therefore A\cup B=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.故选 C.

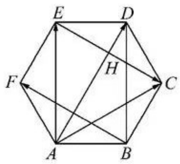
3.B 【解析】若 $f(x)=\ln(mx+3)$在$(-\infty,1]$上单调递减，则满足 $m<0$ 且 $m+3>0$，则$-3<m<0$，即 $f(x)$在$(-\infty,1]$上单调递减的一个充分必要条件是$-3<m<0$.故选 B.

4.C 【解析】如图，沿着侧棱 VA 把正三棱锥 $V-ABC$ 展开在一个平面内，如下图所示：



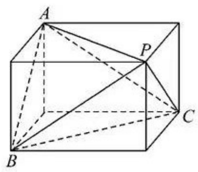
则 AA'即为$\triangle AEF$ 的周长的最小值，且$\angle AVA'=3\times 30°=90°$，在$\triangle VAA'$中，由勾股定理得：$AA'=\sqrt{VA^2+(VA')^2}=\sqrt{8^2+8^2}=8\sqrt{2}$.故选 C.

5.D 【解析】对 A，$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EC}$，显然由图可得$\overrightarrow{EC}$与$\overrightarrow{BF}$为相反向量，故 A 错误；对 B，由图易得$|\overrightarrow{AE}|=|\overrightarrow{AC}|$，直线 AD 平分角$\angle EAC$，且$\triangle ACE$ 为正三角形，根据平行四边形法则有$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AH}$，与$\overrightarrow{AD}$共线且同方向，易知$\triangle EDH$，$\triangle AEH$ 均为含$\frac{\pi}{6}$角的直角三角形，故$|\overrightarrow{EH}|=\sqrt{3}|\overrightarrow{DH}|$，$|\overrightarrow{AH}|=\sqrt{3}|\overrightarrow{EH}|=3|\overrightarrow{DH}|$，则$|\overrightarrow{AD}|=4|\overrightarrow{DH}|$，而$2|\overrightarrow{AH}|=6|\overrightarrow{DH}|$，故$\frac{2|\overrightarrow{AH}|}{|\overrightarrow{AD}|}=\frac{3}{2}$，故$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$，故 B 错误；对 C，因为$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DE}$，故 C 错误；对 D，$\angle ABD=\frac{\pi}{2}$，则$\overrightarrow{AD}$在$\overrightarrow{AB}$上的投影向量为$\overrightarrow{AB}$，故 D 正确.故选 D.



6.D 【解析】由图可知医用普通口罩、医用外科口罩、医用防护口罩的占比分别为 70%，20%，10%，记事件 A_1,A_2,A_3 分别表示选到医用普通口罩、医用外科口罩、医用防护口罩，则 $\Omega=A_1\cup A_2\cup A_3$，且 A_1,A_2,A_3 两两互斥，所以 $P(A_1)=0.7$，$P(A_2)=0.2$，$P(A_3)=0.1$，又三种产品中绑带式口罩的比例分别为 90%，50%，40%，记事件 B 为"选到绑带式口罩"，则 $P(B|A_1)=0.9$，$P(B|A_2)=0.5$，$P(B|A_3)=0.4$，所以由全概率公式可得选到绑带式口罩的概率为 $P(B)=0.7\times0.9+0.2\times0.5+0.1\times0.4=0.77$.故选 D.

7.A 【解析】三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA=BC=4$，$PB=AC=5$，$PC=AB=\sqrt{11}$，构造长方体，使得面上的对角线长分别为 $4,5,\sqrt{11}$，则长方体的体对角线长等于三棱锥 $P-ABC$ 外接球的直径，如图，



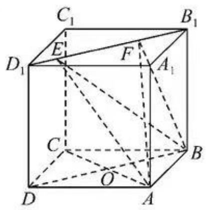
设长方体的棱长分别为 x,y,z，则 $x^2+y^2=16$，$y^2+z^2=25$，$x^2+z^2=11$，则 $x^2+y^2+z^2=26$，因此三棱锥 $P-ABC$ 外接球的直径为 $\sqrt{26}$，所以三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为 $4\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{26}}{2}\right)^2=26\pi$.故选 A.

8.A 【解析】由 $3^a=a^3$，$4^b=b^4$，$5^c=c^5$ 得 $a\ln 3=3\ln a$，$b\ln 4=4\ln b$，$c\ln 5=5\ln c$，因此$\frac{\ln 3}{3}=\frac{\ln a}{a}$，$\frac{\ln 4}{4}=\frac{\ln b}{b}$，$\frac{\ln 5}{5}=\frac{\ln c}{c}$.设函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $f(3)=f(a)$，$f(4)=f(b)$，$f(5)=f(c)$，$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=e$，所以 $f(x)$在$(0,e)$上单调递增，

在$(e,+\infty)$上单调递减，所以$f(3)>f(4)>f(5)$，即$f(a)>f(b)>f(c)$，又$a,b,c\in(0,e)$，所以$a>b>c$.故选A.

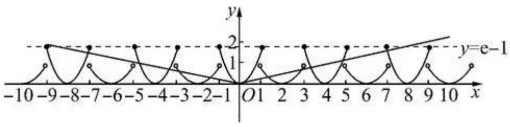
9.AC 【解析】因为$f(x)=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，所以周期$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi$，故A正确；$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)=2\sin\dfrac{5\pi}{6}=1\neq2$，故B不正确；将函数$y=2\sin x$的图象上所有点向左平移$\dfrac{\pi}{3}$个单位长度，得到$y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$的图象，故C正确.因为$x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，所以$x+\dfrac{\pi}{3}\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$，因为$y=2\sin z$在$z\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调递增，在$z\in\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{6}\right]$上单调递减，故当$z=\dfrac{\pi}{2}$时，$y=2\sin z$取得最大值，最大值为2，当$z=-\dfrac{\pi}{6}$时，$y=2\sin z$取得最小值，最小值为$-1$，故D不正确.故选AC.

10.ABC 【解析】由$AC\perp BD$，$AC\perp BB_1$，可证$AC\perp$平面D_1DBB_1，从而$AC\perp BE$，故A正确；由$B_1D_1\parallel$平面$ABCD$，可知$EF\parallel$平面$ABCD$，故B正确；设AC与BD交于点O，则AO为三棱锥$A-BEF$的高，$S_{\triangle BEF}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times1=\dfrac{1}{4}$，三棱锥$A-BEF$的体积为$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{24}$为定值，故C正确；由图形可以看出，$A$到线段$EF$的距离与$B$到线段$EF$的距离不相等，所以$\triangle AEF$的面积与$\triangle BEF$的面积不相等，故D错误.故选ABC.



11.AD 【解析】设$C(x,y)$，AB的垂直平分线为$y=-x$，$\triangle ABC$的外心为欧拉线方程$x-y+2=0$与直线$y=-x$的交点$M(-1,1)$，$\therefore|MC|=|MA|=\sqrt{10}$，$\therefore(x+1)^2+(y-1)^2=10$①，由$A(-4,0)$，$B(0,4)$，$\triangle ABC$重心为$\left(\dfrac{x-4}{3},\dfrac{y+4}{3}\right)$，代入欧拉线方程$x-y+2=0$，得$x-y-2=0$②，由①②可得$x=2,y=0$或$x=0,y=-2$.故选AD.

12.BC 【解析】因为定义在$\mathbf{R}$上的偶函数$f(x)$满足$f(2-x)=f(2+x)$，所以$f(2-x)=f(2+x)=f(x-2)$，所以$f(x+4)=f(x)$，从而4为函数$f(x)$的周期，根据函数性质画出函数$f(x)$的示意图，关于x的不等式$m|x|\leqslant f(x)$的整数解有且仅有9个，从而满足$\begin{cases}7m\leqslant e-1,\\9m>e-1,\end{cases}$解得$\dfrac{e-1}{9}<m\leqslant\dfrac{e-1}{7}$，则实数$m$的取值范围为$\left(\dfrac{e-1}{9},\dfrac{e-1}{7}\right]$.$\dfrac{e-1}{6}\notin\left(\dfrac{e-1}{9},\dfrac{e-1}{7}\right]$，$\dfrac{e-1}{7}\in\left(\dfrac{e-1}{9},\dfrac{e-1}{7}\right]$，$\dfrac{e-1}{8}\in\left(\dfrac{e-1}{9},\dfrac{e-1}{7}\right]$，$\dfrac{e-1}{9}\notin\left(\dfrac{e-1}{9},\dfrac{e-1}{7}\right]$.故选BC.



13.-91 【解析】因为$(1-x)^7+(1-x)^8$，所以含x^3的项为：$(C_7^3+C_8^3)(-x)^3$，所以含x^3的项的系数是$-(C_7^3+C_8^3)=-(35+56)=-91$.故答案为$-91$.

14.2 022 【解析】因为$na_{n+1}-(n+1)a_n=1$，即$na_{n+1}-(n+1)a_n=n+1-n$，所以$n(a_{n+1}+1)=(n+1)(a_n+1)$，等式两端同时除以$n(n+1)$，整理得：$\dfrac{a_{n+1}+1}{n+1}=\dfrac{a_n+1}{n}$，即$\left\{\dfrac{a_n+1}{n}\right\}$为常数列.因为$a_3=2$，所以$\dfrac{a_n+1}{n}=\dfrac{a_3+1}{3}=\dfrac{2+1}{3}=1$，所以$a_n=n-1$，所以$a_{2\,023}=2\,023-1=2\,022$.故答案为2 022.

15.$(0,4]$ 【解析】由题意可得$\dfrac{4(x-2)}{a}+\dfrac{1}{x-2}\geqslant4-\dfrac{8}{a}$对任意$x>2$恒成立，由$a>0,x>2$，可得$\dfrac{4(x-2)}{a}+\dfrac{1}{x-2}\geqslant2\sqrt{\dfrac{4(x-2)}{a}\cdot\dfrac{1}{x-2}}=\dfrac{4}{\sqrt{a}}$，当且仅当$\dfrac{4(x-2)}{a}=\dfrac{1}{x-2}$即$x=2+\dfrac{\sqrt{a}}{2}$时取得等号，则$4-\dfrac{8}{a}\leqslant\dfrac{4}{\sqrt{a}}$，解得$0<a\leqslant4$.故答案为$(0,4]$.

16.①④ 【解析】因为$f(x)+g(x-3)=2$，所以$f(x+3)+g(x)=2$，又$f(1-x)+g(x)=2$，则有$f(x+3)=f(1-x)$，因为$f(x+1)$是奇函数，所以$f(x+1)=-f(1-x)$，可得$f(x+3)=-f(x+1)$，即有$f(x+2)=-f(x)$与$f(x+4)=-f(x+2)$，即$f(x+4)=f(x)$，所以$f(x)$是周期为4的周期函数，故$g(x)$也是周期为4的周期函数.因为$-f(-x)=f(x+2)$，所以$f(-x)=f(x)$，所以$f(x)$为偶函数.故①正确；由$f(x+1)$是奇函数，则$f(1)=0$，所以$f(3)=0$，又$f(2)+f(4)=f(2)+f(0)=0$，所以

$\sum_{k=1}^{20}f(k)=5[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]=0$,所以 ③ 错误;由 $f(1)=0$ 得 $g(0)=2$,所以 ② 错误;因为 $g(2)=2-f(5)=2-f(1)=2$,$g(1)+g(3)=[2-f(4)]+[2-f(6)]=4-[f(4)+f(2)]=4$,所以 $g(0)+g(1)+g(2)+g(3)=8$,所以 $\sum_{k=1}^{20}g(k)=5[g(0)+g(1)+g(2)+g(3)]=40$,所以 ④ 正确.故答案为 ①④.

17.**解**:(1)选条件①:因为$\frac{\sqrt{3}\sin A-\cos A}{\sqrt{3}\sin A+\cos A}=\frac{1}{2}$,

所以 $2(\sqrt{3}\sin A-\cos A)=\sqrt{3}\sin A+\cos A$, ······ 1分

所以$\sqrt{3}\sin A=3\cos A$. ······ 2分

又因为 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $\cos A\neq 0$, ······ 3分

所以 $\tan A=\sqrt{3}$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ······ 4分

选条件②:由正弦定理可得 $2\sin A\cos A-\sin B\cos C=\sin C\cos B$. ······ 1分

即 $2\sin A\cos A=\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin(B+C)=\sin A$, ······ 2分

又因为 $\sin A\neq 0$,所以 $\cos A=\frac{1}{2}$. ······ 3分

因为 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ······ 4分

(2)$a+b+c=2+\frac{a}{\sin A}(\sin B+\sin C)=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left[\sin B+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)\right]+2$ ······ 6分

$=\frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B\right)+2=\frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\frac{3}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right)+2=4\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)+2.$ ······ 8分

$\because C=\frac{2\pi}{3}-B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\therefore B\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right),B+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$, ······ 9分

则 $\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$即 $a+b+c\in(2+2\sqrt{3},6]$,

即$\triangle ABC$ 周长的取值范围为$(2+2\sqrt{3},6]$. ······ 10分

18.(1)**解**:当 $n=1$ 时,$2S_1=2a_1=a_1^2+1$,所以$(a_1-1)^2=0$,即 $a_1=1$, ······ 1分

又$\{a_n\}$为单调递增数列,所以 $a_n\geqslant 1$. ······ 2分

由 $2S_n=a_n^2+n$ 得 $2S_{n+1}=a_{n+1}^2+n+1$,所以 $2S_{n+1}-2S_n=a_{n+1}^2-a_n^2+1$, ······ 3分

整理得 $2a_{n+1}=a_{n+1}^2-a_n^2+1$,所以 $a_n^2=(a_{n+1}-1)^2$, ······ 4分

所以 $a_n=a_{n+1}-1$,即 $a_{n+1}-a_n=1$, ······ 5分

所以$\{a_n\}$是以 1 为首项,1 为公差的等差数列,所以 $a_n=n$. ······ 6分

(2)**证明**:$b_n=\frac{a_{n+2}}{2^{n+1}\cdot a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{n+2}{2^{n+1}\cdot n\cdot(n+1)}=\frac{1}{2^n\cdot n}-\frac{1}{2^{n+1}\cdot(n+1)}$, ······ 8分

所以 $T_n=\left(\frac{1}{2^1\cdot 1}-\frac{1}{2^2\cdot 2}\right)+\left(\frac{1}{2^2\cdot 2}-\frac{1}{2^3\cdot 3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n\cdot n}-\frac{1}{2^{n+1}\cdot(n+1)}\right)$ ······ 10分

$=\frac{1}{2^1\cdot 1}-\frac{1}{2^{n+1}\cdot(n+1)}<\frac{1}{2}$. ······ 12分

19.(1)**证明**:在正方形 $ABCD$ 中,$CD/\!/AB$,$AB\not\subset$平面 CDE,$CD\subset$平面 CDE,

所以 $AB/\!/$平面 CDE. ······ 2分

又 $AB\subset$平面 BAE,平面 BAE 与平面 CDE 交于 EF,

$\therefore AB /\!/ EF$. ………………………………………………………… 4分

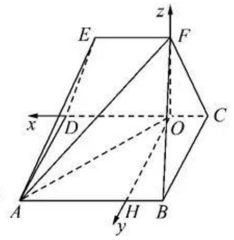
(2)**解**:过点 F 作 $FO\perp DC$ 于 O,过点 O 作 $OH\perp DC$ 于 H,连接 AO.

由平面 $CDE\perp$ 平面 $ABCD$,平面 $CDE\cap$ 平面 $ABCD=CD$,$\therefore FO\perp$ 平面 $ABCD$.

又 $OH\subset$ 平面 $ABCD$,$\therefore FO\perp OH$.

以 O 为坐标原点,分别以 OD,OH,OF 所在直线为 x,y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系, ………………………… 5分

由(1)知 $AB/\!/EF$,$\therefore CD/\!/EF$.



在四边形 $CDEF$ 中,$ED=FC$,$EF=2$,$CD=4$,所以 $OC=1$,$OD=3$.

在正方形 $ABCD$ 中,$AB=4$,所以 $AO=5$.

因为 $AO\perp FO$,且 $AF=3\sqrt{3}$,所以 $FO=\sqrt{2}$.

所以 $H(0,4,0)$,$D(3,0,0)$,$A(3,4,0)$,$E(2,0,\sqrt{2})$,$F(0,0,\sqrt{2})$, ………………………… 6分

所以 $\overrightarrow{DA}=(0,4,0)$,$\overrightarrow{DE}=(-1,0,\sqrt{2})$,$\overrightarrow{AE}=(-1,-4,\sqrt{2})$,$\overrightarrow{FE}=(2,0,0)$.

设平面 ADE 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA}=4y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=-x+\sqrt{2}z=0,\end{cases}$ 令 $z=1$,则 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{2},0,1)$. ………………………… 8分

设平面 BAE 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$,

由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=-a-4b+\sqrt{2}c=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{FE}=2a=0,\end{cases}$ 令 $b=1$,则 $\boldsymbol{m}=(0,1,2\sqrt{2})$. ………………………… 10分

设平面 ADE 和平面 BAE 所成角为 θ,

则 $|\cos\theta|=|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3\times\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$,

所以平面 ADE 和平面 BAE 所成角余弦值的绝对值为 $\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$. ………………………… 12分

20.**解**:(1)因为 $\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\dfrac{130\times(45\times10-60\times15)^2}{60\times70\times105\times25}=\dfrac{117}{49}\approx2.388<2.706$, ………………………… 2分

所以没有 90%的把握认为去年该校 130 名数学系毕业生参加甲地教育部门“优才招聘计划”能否签约与性别有关. ………… 4分

(2)因为小明参加各程序的结果相互不影响,

所以 $X\sim B\left(3,\dfrac{1}{2}\right)$,则 $E(X)=3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$. ………………………… 5分

Y 的可能取值为 0,1,2,3.

$P(Y=0)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{5}(1-m)=\dfrac{4-4m}{15}$,

$P(Y=1)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{5}(1-m)+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{5}(1-m)+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{5}m=\dfrac{8-4m}{15}$,

$P(Y=2)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{5}(1-m)+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{5}m+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{5}m=\dfrac{3+5m}{15}$,

$P(Y=3)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{5}m=\dfrac{m}{5}$.

随机变量 Y 的分布列:

Y	0	1	2	3
P	$\dfrac{4-4m}{15}$	$\dfrac{8-4m}{15}$	$\dfrac{3+5m}{15}$	$\dfrac{m}{5}$

………………………… 9分

$E(Y)=0\times\frac{4-4m}{15}+1\times\frac{8-4m}{15}+2\times\frac{3+5m}{15}+3\times\frac{m}{5}=\frac{14}{15}+m.$ ……………………………… 10 分

因为 $E(X)>E(Y)$，所以 $\frac{3}{2}>\frac{14}{15}+m$，即 $0<m<\frac{17}{30}$， ……………………………… 11 分

所以 $P(A)-P(B)=P(X=3)-P(Y=3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3-\frac{m}{5}=\frac{5-8m}{40}>\frac{5-8\times\frac{17}{30}}{40}=\frac{14}{1\,200}>0$，

所以 $P(A)>P(B)$ ……………………………… 12 分

21.(1)**解**：依题意，$A(-a,0)$，$B(a,0)$，$T(0,b)$，$\overrightarrow{AT}=(a,b)$，$\overrightarrow{TB}=(a,-b)$，

$$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{3},\\ a^2-b^2=8,\\ a^2=b^2+c^2,\\ a>b>0,\end{cases}$$ ……………………………… 2 分

解得 $\begin{cases}a=3,\\ b=1,\\ c=2\sqrt{2},\end{cases}$ 所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$. ……………………………… 4 分

(2)**证明**：设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_i^2+9y_i^2=9$，$x_i\neq\pm3$，$y_i\neq0(i=1,2)$，

①当直线 MN 垂直于 y 轴时，

由对称性，直线 AM，BN 交于 y 轴，不合题意，舍去. ……………………………… 5 分

②当直线 MN 不垂直于 y 轴时，设其方程为 $x=ty+m$.

联立 $\begin{cases}x=ty+m,\\ x^2+9y^2=9,\end{cases}$ 得 $(t^2+9)y^2+2tmy+m^2-9=0$.

依题意，$t^2+9\neq0$，$\Delta>0$，$y_1+y_2=\frac{-2tm}{t^2+9}$，$y_1y_2=\frac{m^2-9}{t^2+9}\neq0$. ……………………………… 6 分

所以 $m\neq\pm3$.

因为 $A(-3,0)$，$B(3,0)$，

所以直线 AM 方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+3}(x+3)$， ……………………………… 7 分

直线 BN 方程为 $y=\frac{y_2}{x_2-3}(x-3)$. ……………………………… 8 分

依题意，设 $P\left(\frac{9}{2},p\right)$，因为 P 为直线 AM，BN 的交点，

所以 $\frac{y_1}{x_1+3}\left(\frac{9}{2}+3\right)=p=\frac{y_2}{x_2-3}\left(\frac{9}{2}-3\right)$.

所以 $\frac{5y_1}{x_1+3}=\frac{y_2}{x_2-3}=\frac{y_2(x_2+3)}{x_2^2-9}=\frac{y_2(x_2+3)}{-9y_2^2}=\frac{(x_2+3)}{-9y_2}$， ……………………………… 9 分

所以 $45y_1y_2+x_1x_2+3(x_1+x_2)+9=0$，

所以 $45y_1y_2+(ty_1+m)(ty_2+m)+3(ty_1+m+ty_2+m)+9=0$，

所以 $(t^2+45)y_1y_2+t(m+3)(y_1+y_2)+(m+3)^2=0$， ……………………………… 10 分

所以 $(t^2+45)\cdot\frac{m^2-9}{t^2+9}+t(m+3)\cdot\frac{-2tm}{t^2+9}+(m+3)^2=0$.

因为 $m\neq\pm3$，所以 $(t^2+45)(m-3)-2t^2m+(m+3)(t^2+9)=0$.

所以 $54m-108=0$，得 $m=2$，直线 MN 的方程为 $x=ty+2$. …………………………………………………… 11 分

所以直线 MN 过定点 $(2,0)$. …………………………………………………………………………………………… 12 分

22.(1)**解**：$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=\dfrac{a(1-\ln x)}{x^2}$， ……………………………………………………………………………………………… 1 分

若 $a>0$，则 $x\in(0,e)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减. ……………………………………………………………… 3 分

若 $a<0$，则当 $x\in(0,e)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增. ……………………………………………………………… 5 分

(2)**证明**：由已知得 $g(x)=\dfrac{xe^x-a(\ln x+x)}{x}=0$ 有两个不等的正实根，

所以方程 $xe^x-a(\ln x+x)=0$，即 $xe^x-a\ln(xe^x)=0$，

即 $xe^x=a\ln(xe^x)$ 有两个不等的正实根. ………………………………………………………………………… 6 分

要证 $x_1x_2>e^{2-(x_1+x_2)}$，只需证 $(x_1e^{x_1})(x_2e^{x_2})>e^2$，

即证 $\ln(x_1e^{x_1})+\ln(x_2e^{x_2})>2$. ……………………………………………………………………………… 7 分

令 $t_1=x_1e^{x_1}$，$t_2=x_2e^{x_2}$，所以只需证 $\ln t_1+\ln t_2>2$. ……………………………………………………… 8 分

由 $xe^x=a\ln(xe^x)$ 得 $a\ln t_1=t_1$，$a\ln t_2=t_2$，

所以 $a(\ln t_2-\ln t_1)=t_2-t_1$，$a(\ln t_2+\ln t_1)=t_2+t_1$，

消去 a 得 $\ln t_2+\ln t_1=\dfrac{t_2+t_1}{t_2-t_1}(\ln t_2-\ln t_1)=\dfrac{\left(\dfrac{t_2}{t_1}+1\right)\ln\dfrac{t_2}{t_1}}{\dfrac{t_2}{t_1}-1}$，

只需证 $\dfrac{\left(\dfrac{t_2}{t_1}+1\right)\ln\dfrac{t_2}{t_1}}{\dfrac{t_2}{t_1}-1}>2$. ……………………………………………………………………………… 9 分

设 $0<t_1<t_2$，令 $s=\dfrac{t_2}{t_1}$，则 $s>1$，所以只需证 $\ln s>\dfrac{2(s-1)}{s+1}$. ……………………………………… 10 分

令 $h(s)=\ln s-\dfrac{2(s-1)}{s+1}$，$s>1$，则 $h'(s)=\dfrac{1}{s}-\dfrac{4}{(s+1)^2}=\dfrac{(s-1)^2}{s(s+1)^2}>0$，

所以 $h(s)>h(1)=0$，即当 $s>1$ 时，$\ln s-\dfrac{2(s-1)}{s+1}>0$ 恒成立. …………………………………… 11 分

所以 $\ln t_1+\ln t_2>2$，即 $(x_1e^{x_1})(x_2e^{x_2})>e^2$，即 $x_1x_2>e^{2-(x_1+x_2)}$. ………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。