

## 2021 全国新高考一卷数学参考答案及解析

## 一、选择题

1. B

解析: 注意到  $4 \notin A$ ,  $3 \in A \cap B$ , 故选 B.

2. C

解析:  $z(\bar{z} - i) = (2 - i)(2 + 2i) = 6 + 2i$ , 故选 C.

3. B

解析: 设圆锥母线长为  $l$ , 根据半圆的弧长等于圆锥底面圆周长可得  $\pi l = 2\sqrt{2}\pi$ , 得  $l = 2\sqrt{2}$ , 故选 B.

4. A

解析: 根据图像和平移的性质知, 函数  $f(x)$  在  $(-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$  上单调递增, 在  $(-\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$  上单调递减, 故选 A.

5. C

解析: 由椭圆的性质有  $|MF_1| + |MF_2| = 2a = 6$ , 由均值不等式得:

$$|MF_1| \cdot |MF_2| \leq \frac{1}{4}(|MF_1| + |MF_2|)^2 = 9.$$

等号成立时,  $|MF_1| = |MF_2| = 3$ ,  $M$  为椭圆的上或下顶点。故选 C.

6. C

解析:

$$\frac{\sin \theta (1 + \sin 2\theta)}{\sin \theta + \cos \theta} = \frac{\sin \theta (\sin \theta + \cos \theta)^2}{\sin \theta + \cos \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = \frac{\tan^2 \theta + \tan \theta}{\tan^2 \theta + 1} = \frac{2}{5}.$$

故选 C.

7. D

解析: 根据函数的凹凸性, 知  $(a, b)$  不可能在  $y = e^x$  上方, 再根据  $y = 0$  是渐近线知, 这个点应该介于  $y = e^x$  和  $y = 0$  之间, 故  $0 < b < e^a$ . 故选 D.

8. B

解析: 不妨设甲、乙、丙、丁发生的概率分别为  $P(a), P(b), P(c), P(d)$ , 那么  $P(a) = \frac{1}{6}, P(b) = \frac{1}{6}, P(c) = \frac{5}{36}, P(d) = \frac{1}{36}$ . 甲丙同时发生的概率为  $P(ac) = 0$ , 甲丁同时发生的概率为  $P(ad) = \frac{1}{36}$ , 乙丙同时发生的概率为  $P(bc) = \frac{1}{36}$ , 丙丁同时发生的概率为  $P(cd) = 0$ . 满足  $P(xy) = P(x)P(y)$  的只有甲丁组合. 故选 B.

## 二、选择题

9. CD

解析: 根据样本数据的平均数、中位数、标准差、极差的计算公式可以看出, C, D 选项正确. 故选 CD.

10. AC

解析:  $|\overrightarrow{OP_1}| = |\overrightarrow{OP_2}| = 1$ , A 正确;  $|\overrightarrow{AP_1}|^2 = 2 - 2\cos\alpha$ ,  $|\overrightarrow{AP_2}|^2 = 2 - 2\cos\beta$ , B 错误;  $\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha + \beta) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_3}$ , C 正确;  $\overrightarrow{OP_2} \cdot \overrightarrow{OP_3} = \cos(\alpha + \beta)\cos\beta - \sin(\alpha + \beta)\sin\beta = \cos(\alpha + 2\beta)$ ,  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_1} = \cos\alpha$ , D 错误. 故选 AC.

11. ACD

解析: 圆的半径  $r = 4$ , 直线 AB 方程为  $y = -\frac{1}{2}x + 2$  过 P 作直线 AB 平行线, 方程为  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{15}{2}$ . 两直线之间距离  $d = \frac{|\frac{15}{2} - 2|}{\sqrt{1 + (-\frac{1}{2})^2}} = \frac{11}{\sqrt{5}}$ , 注意到  $d < 6$ , 故 P 到直线 AB 距离最大值为  $d + r < 10$ , A 正确; P 到直线 AB 距离最小值为  $d - r < 2$ , B 错误;  $\angle PAB$  的最值在 PB 为切线时取得, 设圆心  $O(5, 5)$ , 则  $OB = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$ , 由于 PB 为切线, 故  $PB \perp OB$ , 由勾股定理得  $|PB| = \sqrt{34 - 4^2} = 3\sqrt{2}$ . 再由于同一点到圆的两条切线是等长的, 故 CD 正确. 故选 ACD.

12. BD

解析: 对于 A 选项, 当  $\lambda = 1$  时, P 为  $CC_1$  上的点, 此时  $|AP| + |PB_1|$  不为定值, A 错误; 对于 B 选项, 当  $\mu = 1$  时, P 为  $B_1C_1$  上的点, 由于  $B_1C_1 \parallel BC$ , 故  $B_1C_1 \parallel$  平面  $A_1BC$ , 因此三棱锥  $P - A_1BC$  的高为定值, B 正确; 对于 C 选项, 设 BC 中点为 D,  $B_1C_1$  中点为  $D_1$ , 那么当  $\lambda = \frac{1}{2}$  时, P 为  $DD_1$  上的点, 由于  $A_1D_1 \perp$  平面  $BCC_1B_1$ , 故  $A_1D_1 \perp BD_1$ , 再由  $BD \perp$  平面  $ADD_1A_1$  知  $A_1D \perp BD$ , 从而当 P 分别与 D 或  $D_1$  重合

时满足  $A_1P \perp BP$ , 故有两个  $P$  满足条件,  $C$  错误; 对于  $D$  选项, 设  $CC_1$  中点为  $E$ ,  $BB_1$  中点为  $F$ , 正方形  $AA_1B_1B$  的中心为  $G$ , 那么当  $\mu = \frac{1}{2}$  时,  $P$  为  $EF$  上的点, 考虑到  $EG \perp$  平面  $AA_1B_1B$ , 故  $EG \perp A_1B$ , 又因为  $A_1B \perp AB_1$ , 故  $A_1B \perp$  平面  $EAB_1$ , 即当  $P$  与  $E$  重合时满足条件, 这样的  $P$  一定是唯一的, 因为过  $AB$  两点并与直线  $A_1B$  垂直的平面是唯一的。

### 三、填空题

13. 1

解析: 令  $f(x) = f(-x)$  可得  $x^3(2^x + 2^{-x})(a-1) = 0$  对于任意  $x$  恒成立, 故  $a = 1$ .

14.  $x = -\frac{3}{2}$

解析: 焦点坐标为  $F(\frac{p}{2}, 0)$ ,  $P$  点坐标为  $P(\frac{p}{2}, p)$ , 从而  $|PF| = p$ ,  $|OF| = \frac{p}{2}$ , 根据直角三角形的性质有恒等式  $|PF|^2 = |OF| \cdot |FQ|$ , 得  $p^2 = 3p$ , 故  $p = 3$ , 准线方程为  $x = -\frac{3}{2}$ .

15. 1

解析: 当  $x \geq \frac{1}{2}$  时,  $f(x) = 2x - 2\ln(x) - 1$ ,  $f'(x) = \frac{2(x-1)}{x} > 0$ , 故  $f(x) \geq f(1) = 1$ . 当  $x < \frac{1}{2}$  时,  $f(x) = 1 - 2\ln(x) - 2x$ ,  $f'(x) = \frac{-2(x+1)}{x} < 0$ , 故  $f(x) > f(\frac{1}{2}) = 2\ln 2 > 1$ , 故函数  $f(x)$  最小值为 1.

16.  $5 \quad 240(3 - \frac{n+3}{2^n})$

解析: 根据规律可知, 对于给定的  $n$ , 折叠  $n$  次可以得到图形的规格形如  $(\frac{20}{2^k})\text{dm} \times (\frac{12}{2^{n-k}})\text{dm}$ , 其中  $k = 0, 1, \dots, n$ , 不同规格种数为  $n+1$ , 从而当  $n=4$  时的规格种数为 5, 每一种规格的面积都是  $\frac{240}{2^n} \text{dm}^2$ , 从而  $S_n = \frac{240(n+1)}{2^n}$ , 因此

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n S_k &= 240 \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{2^k} = 240(2 \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{2^k} - \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{2^k}) \\ &= 240(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+2}{2^k} - \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{2^k}) = 240(2 - \frac{n+1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k}) \\ &= 240(3 - \frac{n+3}{2^n}) \quad (\text{dm}^2). \end{aligned}$$

#### 四、解答题

17.

(1)

由数学归纳法不难归纳出

$$a_n = \begin{cases} \frac{3n-1}{2} & 2 \nmid n \\ \frac{2n-2}{2} & 2 | n \end{cases}$$

从而  $b_n = a_{2n} = 3n - 1 (n \in \mathbb{Z}^+)$ ,  $b_1 = 2$ ,  $b_2 = 5$ .

(2)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{20} a_k &= \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{10} a_{2k} \\ &= \sum_{k=1}^{10} (3k-2) + \sum_{k=1}^{10} (3k-1) \\ &= 6 \sum_{k=1}^{10} k - 30 = 300. \end{aligned}$$

18.

(1)

$X$  的分布列为:

$$P(X=0) = 0.2$$

$$P(X=20) = 0.8 \times (1-0.6) = 0.32$$

$$P(X=100) = 0.8 \times 0.6 = 0.48.$$

(2)

在先答类型 A 的前提下, 数学期望为

$$E(X) = 20 \times 0.32 + 100 \times 0.48 = 54.4$$

在先答类型 B 的前提下, 数学期望为

$$E(Y) = 80 \times 0.6 \times (1-0.8) + 100 \times 0.48 = 57.6$$

由于小明先答 B 能使累计得分数学期望更大 ( $E(Y) > E(X)$ ), 故小明应该先答类型 B.

19.

(1)

由正弦定理可得:

$$BD = \frac{a \sin C}{\sin B} = \frac{ac}{b} = \frac{b^2}{b} = b.$$

(2)

注意到  $\angle BDA$  与  $\angle BDC$  是互补的, 它们的余弦值互为相反数, 从而分别在  $\triangle BDA$  以及  $\triangle BDC$  中使用余弦定理得:

$$\cos \angle BDA + \cos \angle BDC = \frac{b^2 + (\frac{2}{3}b)^2 - c^2}{2 \cdot (\frac{2}{3}b) \cdot b} + \frac{b^2 + (\frac{1}{3}b)^2 - a^2}{2 \cdot (\frac{1}{3}b) \cdot b} = 0$$

化简得  $\frac{11}{3}b^2 - c^2 - 2a^2 = 0$ , 再由  $b^2 = ac$  代入得

$$3c^2 - 11ac + 6a^2 = 0.$$

令  $\lambda = \frac{c}{a}$ , 得  $3\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0$ , 解得  $\lambda = 3$  或  $\frac{2}{3}$ . 从而

$$\cos \angle ABC = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + c^2 - ac}{2ac} = \frac{\lambda^2 - \lambda + 1}{2\lambda}$$

得  $\cos \angle B = \frac{7}{6}$  (舍) 或  $\frac{7}{12}$ .

20.

(1)

由于平面  $ABD \perp$  平面  $BCD$ , 而  $AB = AD$ , 等腰三角形的中线即为高, 因而  $AO \perp BD$ , 考虑到  $BD$  为两平面的交集, 因此  $AO \perp$  平面  $BCD$ , 从而  $OA \perp CD$ .

(2)

以  $O$  为原点,  $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$  方向为  $x$  轴正方向,  $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$  方向为  $y$  轴正方向,  $\overrightarrow{OA}$  方向为  $z$  轴正方向建立坐标系. 设  $|OA| = h$ , 那么我们可以得到各个点的坐标  $D(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ ,  $C(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ ,  $B(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ ,  $A(0, 0, h)$ ,  $E(-\frac{2}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{2}{3}h)$ . 设平面  $BCD$  的一个法向量为  $\vec{v}_1 = (0, 0, 1)$ , 平面  $BCE$  的一个法向量为  $\vec{v}_2 = (x, y, 1)$ , 而  $\overrightarrow{BC} = (0, \sqrt{3}, 0)$ ,  $\overrightarrow{EC} = (\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3}h)$ , 那么

$$\begin{cases} \vec{v_2} \cdot \vec{BC} = 0 \\ \vec{v_2} \cdot \vec{EC} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = h \\ y = 0 \end{cases}$$

从而  $\cos \langle \vec{v_1}, \vec{v_2} \rangle = \frac{1}{\sqrt{1+h^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 得到  $h=1$ , 因此三棱锥的体积为

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

21.

(1)

由双曲线的定义知,  $C$  是一个右半边的双曲线, 其中  $a = \frac{1}{2}(|MF_1| + |MF_2|) = 1$ ,  $c = \sqrt{17}$ ,  $b = \sqrt{17-1} = 4$ , 故  $C$  的方程为

$$x^2 - \frac{y^2}{16} = 1. (x \geq 1)$$

(2)

考虑过  $T$  点任意斜率  $k$  并交  $C$  于两点的情况。直线的方程为  $y = kx + t - \frac{k}{2}$ . 代入  $C$  的方程并化简得

$$(16 - k^2)x^2 - k(t - 2k) - (t - \frac{k}{2})^2 - 16 = 0.$$

此时, 设直线与  $C$  的两个交点为  $X_1(x_1, y_1)$  和  $X_2(x_2, y_2)$ , 那么由韦达定理得  $x_1 + x_2 = \frac{k(t-2k)}{16-k^2}$ ,  $x_1x_2 = \frac{-(t-\frac{k}{2})^2-16}{16-k^2}$ . 此时

$$\begin{aligned} |TX_1| \cdot |TX_2| &= \sqrt{k^2+1}(\frac{1}{2} - x_1) \cdot \sqrt{k^2+1}(\frac{1}{2} - x_2) \\ &= (k^2+1)(x_1x_2 - \frac{1}{2}(x_1+x_2) + \frac{1}{4}) \\ &= \frac{(1+k^2)(t^2+12)}{k^2-16}. \end{aligned}$$

令  $|TX_1| \cdot |TX_2| = \lambda$ , 我们整理得

$$(\frac{\lambda}{t^2+12} - 1)k^2 = \frac{16\lambda}{t^2+12} + 1.$$

此时我们设直线  $TA$  和直线  $TP$  斜率分别为  $k_1, k_2 (k_1 \neq k_2)$ , 那么它们是上述方程的两个根 (对于某个给定的  $\lambda$  而言), 因而由韦达定理得  $k_1 + k_2 = 0$ .

22.

(1)

求导数得  $f'(x) = -\ln(x)$ , 根据  $f'(x)$  的正负知  $f(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递增, 在  $(1, \infty)$  上单调递减。

(2)

证明: 令  $u = \frac{1}{a}$ ,  $v = \frac{1}{b}$ , 化简得  $u(1 - \ln(u)) = v(1 - \ln(v))$ , 即  $f(u) = f(v)$ , 此时我们只需要证明  $2 < u + v < e$ , 也即  $2 - u < v < e - u$ . 其中, 我们不妨假设  $v > u$ , 那么  $u \in (0, 1), v \in (1, e)$ .

由洛必达法则知

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0.$$

再由第一问得到的函数单调性知  $f(x) > 0$  对于任意  $x \in (0, e)$  恒成立。令  $g(x) = f(x) - f(2 - x)$ , 其中  $x \in (0, 1)$ , 那么  $g'(x) = -\ln(1 - x) - \ln(x)$ ,  $g''(x) = \frac{2(x - 1)}{x(2 - x)} < 0$ , 故  $g'(x)$  在区间  $(0, 1)$  上单调递减, 故  $g'(x) > g'(1) = 0$ , 从而  $g(x)$  在此区间单调递增, 所以  $g(x) < g(1) = 0$ . 令  $x = u$ , 可知  $f(u) < f(2 - u)$ , 所以

$$f(v) = f(u) < f(2 - u),$$

再由  $f(x)$  在区间  $(1, e)$  上单调递减得  $v > 2 - u$ .

类似地, 再令  $h(x) = f(x) - f(e - x)$ , 其中  $x \in (0, 1)$ , 此时  $h'(x) = -\ln(e - x) - \ln(x)$ ,  $h''(x) = \frac{2(x - \frac{e}{2})}{x(e - x)} < 0$ , 故  $h'(x)$  在区间  $(0, 1)$  上单调递减, 此时  $h'(1) = -\ln(e - 1) < 0$ , 又因为当  $x \rightarrow 0^+$  时,  $h'(x) \rightarrow +\infty$ , 从而在区间  $(0, 1)$  上  $h'(x)$  有唯一的零点  $\epsilon$ . 此时  $h(x)$  在  $(0, \epsilon)$  上单调递增, 在  $(\epsilon, 1)$  上单调递减, 而

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0.$$

并且  $h(1) = f(1) - f(e - 1) > 0$ , 从而  $h(x) > 0$  对于  $x \in (0, 1)$  恒成立, 取  $x = u$  得  $f(u) > f(e - u)$ , 所以

$$f(v) = f(u) > f(e - u)$$

再由  $f(x)$  在区间  $(1, e)$  上单调递减得  $v < e - u$ .

因此  $2 - u < v < e - u$ . 证毕.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。

总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上

的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》