中学生标准学术能力诊断性测试 2021 年 1 月测试

理科数学试卷（一卷）

本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 集合 $A=\{1,2,3,4,5\}, B=\{y \mid y=2^x, x\in N\}$，则 $A\cap C_{R}B$ 中元素个数为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 已知双曲线 $\frac{x^2}{1-m}-\frac{y^2}{m-5}=1$，则下列说法正确的是

A. 焦点为 $(0,\pm\sqrt{6})$　　B. 焦点为 $(\pm 2,0)$

C. 焦距是 4　　D. 焦距是 2

3. 已知复数 z 满足 $\frac{z-i}{i}=a+2i$（i 是虚数单位），$a\in\mathbf{R}$，且 $|z|=2\sqrt{2}$，则实数 a 的值为

A. -3　　B. 1　　C. -1 或 1　　D. -3 或 1

4. 已知 $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=1$，向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 120°，若 $k\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}-2\vec{b}$ 垂直，则 k 的值为

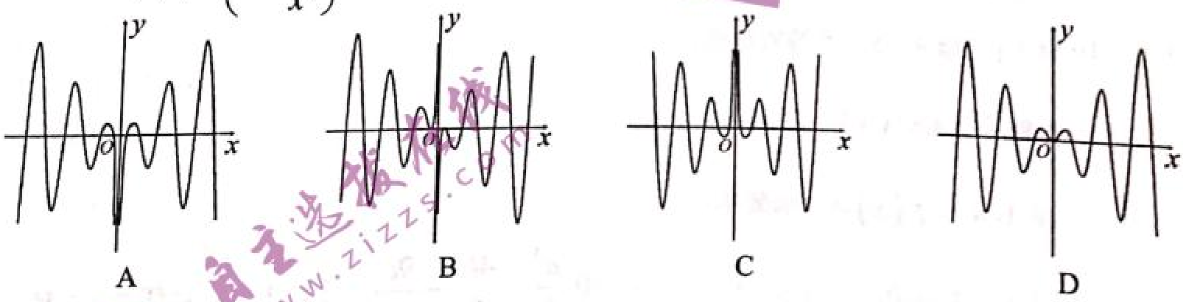
A. -1　　B. 1　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

5. 若 $a,b\in[0,1]$，则“$a+b^2\le 1$”是“$a+b\le\frac{5}{4}$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 已知函数 $f(x)=\left(x-\frac{1}{x^3}\right)\cdot\sin x$，则其图象为



7. 已知函数 $f(x)=x^3-3x$，若对任意的实数 x，不等式 $f(x+t)\ge f(x)+t(t\ne 0)$ 恒成立，则实数 t 的取值范围是

A. $[4,+\infty)$　　B. $(0,4]$　　C. $(-\infty,-4]$　　D. $[-4,0)$

8. 二项式$(1+x)^2(2x-1)^5$的展开式中含x^4项的系数为

A. 280　　B. 200　　C. 120　　D. 40

9. 已知$-\frac{\pi}{2}<\beta-\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\sin\beta-2\cos\alpha=1$, $2\sin\alpha+\cos\beta=\sqrt{2}$，则$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=$

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　C. $\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D. $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

10. 已知正六棱锥$V-ABCDEF$, P是侧棱VC上一点（不含端点），记直线PB与直线DE所成角为α，直线PB与平面ABC所成角为β，二面角$P-CD-F$的平面角为γ，则

A. $\beta<\gamma,\alpha<\gamma$　　B. $\beta<\alpha,\beta<\gamma$　　C. $\beta<\alpha,\gamma<\alpha$　　D. $\alpha<\beta,\gamma<\beta$

11. 函数$f(x)=\sqrt{\sin\pi x}(0\le x\le 1)$, $g(x)=x\cdot f(x)$，直线$x=m(0<m<1)$先后与$f(x)$, $g(x)$, x轴交于A,B,C，直线$x=1-m$先后与$f(x)$, $g(x)$, x轴交于A_1,B_1,C_1，则

A. $AB=A_1B_1$　　B. $AB=2A_1B_1$　　C. $AB=B_1C_1$　　D. $AB=2B_1C_1$

12. 已知直线BC垂直单位圆O所在的平面，且直线BC交单位圆于点A, $AB=BC=1$, P为单位圆上除A外的任意一点，l为过点P的单位圆O的切线，则

A. 有且仅有一点P使二面角$B-l-C$取得最小值

B. 有且仅有两点P使二面角$B-l-C$取得最小值

C. 有且仅有一点P使二面角$B-l-C$取得最大值

D. 有且仅有两点P使二面角$B-l-C$取得最大值

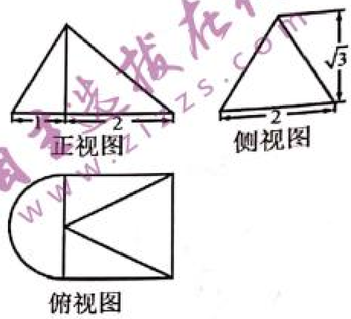
二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 若函数$f(x)=\begin{cases}\log_a x, x\ge 2\\ -\log_a x-4, 0<x<2\end{cases}$存在最大值，则实数$a$的取值范围是________.

14. 现将大小和形状相同的4个黑色球和4个红色球排成一排，从左边第一个球开始数，不管数几个球，黑球数不少于红球数的排法有________种.

15．某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为________．

16．已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，点 $P(a,b)$ 为椭圆外一点，斜率为 $-\frac{1}{2}$ 的直线与椭圆交于 A,B 两点，过点 P 作直线 PA,PB 分别交椭圆于 C,D 两点．当直线 CD 的斜率为 $-\frac{1}{2}$ 时，此椭圆的离心率为________．



（第 15 题图）

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17．（12 分）已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+\cos^2\omega x(\omega>0)$，周期是 $\frac{\pi}{2}$．

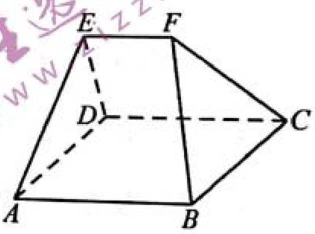
（1）求 $f(x)$ 的解析式，以及 $x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{24}\right]$ 时 $f(x)$ 的值域；

（2）将 $f(x)$ 图像上所有点的横坐标扩大到原来的 2 倍，再向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，最后将整个函数图像向上平移 $\frac{3}{2}$ 个单位后得到函数 $g(x)$ 的图像，若 $|g(x)-m|<1$ 成立的充分条件是 $0\le x\le\frac{5\pi}{12}$，求实数 m 的取值范围．

18．（12 分）如图所示的多面体中，四边形 $ABCD$ 是正方形，平面 $ADE\perp$ 平面 $CDEF,EF//CD,AB=2,ED=2,EF=1,\angle EDA\ne 90^\circ$．

（1）证明：平面 $ADE\perp$ 平面 $ABCD$；

（2）若 CF 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$，求这个多面体的体积 V．



（第 18 题图）

19．（12 分）数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n,n\in N^*$，满足 $S_n=1-a_n$，设 $b_n=2(S_n+a_{n+1})$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n．

（1）求 T_n；

（2）设 $c_n=S_n+T_n$，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 R_n，求证：$\frac{T_1+1}{R_1^2}+\frac{T_2+1}{R_2^2}+\cdots\frac{T_n+1}{R_n^2}<1$

20. （12分）已知 F_1,F_2 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，弦 AB 经过点 F_2，若 $|AF_2|=2|F_2B|,\tan\angle AF_1B=\frac{3}{4}$，且 ΔF_1F_2B 的面积为2.

（1）求椭圆的方程；

（2）若直线 $y=k(x-1)(1\le k\le 2)$，与 y 轴交于点 P，与椭圆 C 交于 M,N 两点，线段 MN 的垂直平分线与 y 轴交于点 Q，求 $\frac{|MN|}{|PQ|}$ 的取值范围.

21. （12分）设 a 为正实数，函数 $f(x)=ae^{ax}-\sqrt{x}$ 存在零点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，且存在极值点 x_0.

（1）当 $a=1$ 时，求曲线 $f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（2）求 a 的取值范围，并证明：$2x_1+3x_0>3$.

（二）选考题：共10分．请考生在第22、23题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．作答时请写清题号．

22. （10分）[选修4—4：极坐标与参数方程]

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{2}+\sqrt{2}\cos\theta\\y=1+\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}$ (θ为参数)，曲线 C_1 与 x 轴交于 A,B 两点（点 A 在点 B 的左侧），过点 A 作任意一条直线与圆 O：$x^2+y^2=1$ 交于 P,Q 两点.

（1）写出 C_1 的普通方程；

（2）问 $\frac{|PA|}{|PB|}+\frac{|QB|}{|QA|}$ 是否为定值？若是，请求出定值，若不是，请说明理由.

23. （10分）[选修4—5：不等式选讲]

已知函数 $f(x)=|x+1|+|2x-4|$.

（1）求不等式 $f(x)\ge 4$ 的解集；

（2）已知实数 a,b,c 满足 $a>0,b>0,c>0,\frac{a^2}{2b}+\frac{4b^2}{3c}+\frac{9c^2}{a}=3$，求证：对任意 $x\in\mathbf{R}$，不等式 $f(x)\ge a+2b+3c$ 恒成立.

中学生标准学术能力诊断性测试 2021 年 1 月测试

理科数学试卷（一卷）参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	C	D	D	A	A	A	D	B	B	C	D

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

14. 14

15. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}(\pi+8)$

16. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17．解：

（1）$f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+\cos^2\omega x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x+\dfrac{1}{2}(\cos 2\omega x+1)$

$=\sin\left(2\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}$ ……2 分

由 $T=\dfrac{2\pi}{2\omega}=\dfrac{\pi}{2}$，解得 $\omega=2$，所以函数 $f(x)=\sin\left(4x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}$ ……3 分

因为 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{7\pi}{24}\right]$，所以 $-\dfrac{\pi}{6}\le 4x+\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{4\pi}{3}$，所以 $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\le\sin\left(4x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}\le\dfrac{3}{2}$，

即函数 $f(x)$ 在 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{7\pi}{24}\right]$ 上的值域是 $\left[\dfrac{1-\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2}\right]$ ……5 分

（2）由题意得 $g(x)=\sin\left(2x+\dfrac{5\pi}{6}\right)+2$……7 分

因为 $|g(x)-m|<1$ 成立的充分条件是 $0\le x\le\dfrac{5\pi}{12}$，

所以当 $x\in\left[0,\dfrac{5\pi}{12}\right]$ 时，$g(x)-1<m<g(x)+1$ 恒成立，

所以只需 $\left[g(x)-1\right]_{\max}<m<\left[g(x)+1\right]_{\min}$，转化为求 $g(x)$ 的最大值与最小值

……9 分

当 $x\in\left[0,\dfrac{5\pi}{12}\right]$ 时，$2x+\dfrac{5\pi}{6}\in\left[\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{5\pi}{3}\right]$，

所以 $g(x)_{\max}=g(0)=\dfrac{1}{2}+2=\dfrac{5}{2},g(x)_{\min}=g\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-1+2=1$，

从而 $\left[g(x)-1\right]_{\max}=\dfrac{3}{2},\left[g(x)+1\right]_{\min}=2$，

即 $\dfrac{3}{2}<m<2$.所以 m 的取值范围是 $\left(\dfrac{3}{2},2\right)$……12 分

18．解：

（1）证明：过点 A 在平面 ADE 内做 DE 的垂线，垂足为 P．

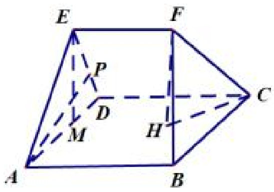
因为平面 $ADE\perp$ 平面 $CDEF$，平面 $ADE\cap$ 平面 $CDEF=DE$，

所以 $AP\perp$ 平面 $CDEF$，所以 $AP\perp CD$……2 分

又因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $AD\perp CD$……3 分

$\because\angle EDA\ne 90^\circ$，又 $AP\cap AD=A$，从而 $CD\perp$ 平面 ADE，而 $CD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以平面 $ADE\perp$ 平面 $ABCD$……5 分



（2）在平面 ADE 内，过点 E 作 AD 垂线，垂足为 M，

与（1）同理得，$EM\perp$ 平面 $ABCD$，

过 F 作 $FH\parallel EM$，交平面 $ABCD$ 于 H，连接 CH

$\therefore FH\perp$ 平面 $ABCD$，

$\therefore CH$ 是 FC 在平面 $ABCD$ 内的射影．

$\therefore\angle FCH$ 为 CF 与平面 $ABCD$ 所成角，

$\because CD\perp$ 平面 $ADE, ED\subset$ 平面 $ADE,\therefore CD\perp ED$，即 $\angle EDC=90^\circ$……7 分

由$CD=AB=2,ED=2,EF=1$，得$CF=\sqrt{5}$……8分

$\because CF$与平面$ABCD$所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{15}}{5}$，所以$FH=\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{15}}{5}=\sqrt{3}$……9分

因为$EF//CD,EF\not\subset$平面$ABCD,CD\subset$平面$ABCD$，

所以$EF//$平面$ABCD$，所以$EM=FH=\sqrt{3}$，

又$ED=2$，所以$\angle EDA=60^\circ$，从而ΔADE是正三角形，

可得：$S_{\Delta ADE}=\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$……10分

因为$CD\perp$平面$ADE,EF//CD$，所以$EF\perp$平面ADE，所以这个多面体的体积

$V=V_{四棱锥F-ABCD}+V_{三棱锥F-ADE}=\frac{1}{3}\times4\times\sqrt{3}+\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times1=\frac{5\sqrt{3}}{3}$……12分

19．解：

（1）$S_1=1-a_1$得$a_1=\frac{1}{2}$……1分

$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=(1-a_{n+1})-(1-a_n)=a_n-a_{n+1}$，所以$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$，

可得$\{a_n\}$为等比数列，所以$a_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2^n}$……3分

$T_n=2(S_1+a_1+S_2+a_2+\cdots+S_n+a_n)-2a_1+2a_{n+1}$

$=2n-2\times\frac{1}{2}+2a_{n+1}=2n-1+\frac{1}{2^n}$……6分

（2）因为$c_n=S_n+T_n=1-a_n+T_n$，由（1）代入可得：

$c_n=1-\frac{1}{2^n}+2n-1+\frac{1}{2^n}=2n$……8分，

$R_n=n(n+1)$……9分

$\frac{T_n+1}{R_n^2}=\frac{2n+\frac{1}{2^n}}{n^2(n+1)^2}<\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$，

所以$\frac{T_1+1}{R_1^2}+\frac{T_2+1}{R_2^2}+\cdots\frac{T_n+1}{R_n^2}<1-\frac{1}{(n+1)^2}<1$……12 分

20．解：

（1）设$|AF_2|=2|F_2B|=2k\ (k>0)$，则$|AF_1|=2a-2k,|F_1B|=2a-k$，

在ΔAF_1B中，由余弦定理得$(3k)^2=(2a-2k)^2+(2a-k)^2-2(2a-2k)(2a-k)\cdot\frac{4}{5}$，

整理得$2a^2-3ak-9k^2=0$，解得$a=3k$……2 分

所以$|AF_1|=4k,|F_1B|=5k,|AB|=3k$，所以$\angle F_1AF_2=90°$，

在$Rt\Delta AF_1F_2$中，$|AF_1|^2+|AF_2|^2=|F_1F_2|^2$，即$(4k)^2+(2k)^2=(2c)^2$，

解得$c=\sqrt{5}k$……3 分

又因为$\frac{S_{\Delta AF_1F_2}}{S_{\Delta BF_1F_2}}=\frac{|AF_2|}{|F_2B|}=2$，

故$S_{\Delta AF_1F_2}=2S_{\Delta BF_1F_2},S_{\Delta AF_1F_2}=\frac{1}{2}|AF_1|\cdot|AF_2|=\frac{1}{2}\cdot 4k\cdot 2k=4k^2$，故$4=4k^2$，

即$k=1,c=\sqrt{5},a=3,b=2$，所以椭圆C的方程是$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$……5 分

（2）由$\begin{cases}y=k(x-1)\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$得$(4+9k)x^2-18k^2x+9k^2-36=0$．设$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，

则有$x_1+x_2=\frac{18k^2}{4+9k^2},x_1x_2=\frac{9k^2-36}{4+9k^2},y_1+y_2=k(x_1+x_2-2)=\frac{-8k}{4+9k^2}$……7 分

所以线段MN的中点坐标为$\left(\frac{9k^2}{4+9k^2},\frac{-4k}{4+9k^2}\right)$，

则线段MN的垂直平分线方程为$y-\frac{-4k}{4+9k^2}=-\frac{1}{k}\left(x-\frac{9k^2}{4+9k^2}\right)$，

令$x=0$，则$y=\frac{5k}{4+9k^2}$，

于是线段MN的垂直平分线与y轴的交点$Q\left(0,\frac{5k}{4+9k^2}\right)$，又点$P(0,-k)$，

所以$|PQ|=\left|k+\dfrac{5k}{4+9k^2}\right|=\left|\dfrac{9k(1+k^2)}{4+9k^2}\right|$……9 分

又$|MN|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=\dfrac{24\sqrt{(1+k^2)(1+2k^2)}}{4+9k^2}$，

于是$\dfrac{|MN|}{|PQ|}=\left|\dfrac{8\sqrt{1+2k^2}}{3k\sqrt{1+k^2}}\right|=\left|\dfrac{8}{3}\sqrt{\dfrac{1+2k^2}{k^2+k^4}}\right|=\dfrac{8}{3}\sqrt{\dfrac{(1+k^2)+k^2}{k^2(k^2+1)}}=\dfrac{8}{3}\sqrt{\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{1}{k^2+1}}$，

因为$k\in[1,2]$，所以$\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{1}{1+k^2}\in\left[\dfrac{9}{20},\dfrac{3}{2}\right]$，所以$\dfrac{|MN|}{|PQ|}$的取值范围为$\left[\dfrac{4\sqrt{5}}{5},\dfrac{4\sqrt{6}}{3}\right]$

……12 分

21．解：

（1）$f'(x)=a^2e^{ax}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，则$f'(1)=a^2e^a-\dfrac{1}{2}=e-\dfrac{1}{2}$……2 分

当$x=1$时，$f(1)=ae^a-1=e-1$，所以切点坐标为$(1,e-1)$，

则切线方程为$y=\left(e-\dfrac{1}{2}\right)(x-1)+e-1$，即$y=\left(e-\dfrac{1}{2}\right)x-\dfrac{1}{2}$……4 分

（2）$\because f'(x)=a^2e^{ax}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{2a^2\sqrt{x}e^{ax}-1}{2\sqrt{x}}$，

记$g(x)=2a^2\sqrt{x}e^{ax}-1$，$\because a>0$，$\therefore g(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，

记$p(x)=e^x-ex$，$p'(x)=e^x-e=0\Rightarrow x=1$，

当$x>1$时，$p'(x)>0,p(x)$单调递增；

当$0\le x<1$时，$p'(x)<0,p(x)$单调递减，

$\therefore p(x)\ge p(1)=e^1-e=0$，有$e^x\ge ex$，故有$e^{ax}\ge eax$……6 分

$\therefore g(x)\ge 2a^2\sqrt{x}(eax)-1=2ea^3x^{\frac{3}{2}}-1$，可得$g\left(\dfrac{4}{\sqrt[3]{2e^2a^2}}\right)>0$，

又$\because g(0)=-1<0$，$\therefore g(x)$，存在唯一正根t，

使得：$g(t)=0$，且在$(0,t)$上$g(x)<0$，在$(t,+\infty)$上$g(x)>0$，在$x\in(0,t)$时，

$f'(x)<0$，在 $x\in(t,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，且 $f'(t)=0$，即 $f'(x)$ 存在唯一正根 t，

故 $f(x)$ 定有极小值点 $x_0=t$ …….8 分

由 $g(x_0)=0$，可知 $g(x_0)=2a^2\sqrt{x_0}e^{ax_0}-1=0,\therefore ae^{ax_0}=\dfrac{1}{2a\sqrt{x_0}}$，

又$\because f(x)=ae^{ax}-\sqrt{x}$ 存在零点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，

$\therefore f(x_0)=ae^{ax_0}-\sqrt{x_0}=\dfrac{1}{2a\sqrt{x_0}}-\sqrt{x_0}=\dfrac{1-2ax_0}{2a\sqrt{x_0}}<0$，即 $ax_0>\dfrac{1}{2}$，

$\therefore 0=2\sqrt{x_0}\cdot a^2e^{ax_0}-1>2\sqrt{\dfrac{1}{2a}}\cdot a^2e^{\frac{1}{2}}-1=\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{e}-1$，可得 $0<a<\dfrac{1}{\sqrt[3]{2e}}$ ……9 分

由题可得 $ae^{ax_1}=\sqrt{x_1}$，$a^2e^{ax_0}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$，将两式相除可得 $e^{a(x_1-x_0)}=2a\sqrt{x_1x_0}$，

记 $r(x)=e^x-x-1$，令 $r'(x)=e^x-1=0\Rightarrow x=1$，

当 $x>0$ 时，$r'(x)>0,r(x)$ 单调递增；当 $x<0$ 时，$r'(x)<0,r(x)$ 单调递减，

则 $r(x)\ge r(0)=e^0-0-1=0$，即 $e^x\ge x+1$ …….10 分

$\therefore e^{a(x_1-x_0)}=2a\sqrt{x_1x_0}\ge 1+a(x_1-x_0)>\sqrt[3]{2e}\cdot a+a(x_1-x_0)$，

$\because a>0,\therefore \sqrt[3]{2e}+(x_1-x_0)<2\sqrt{x_1x_0}$，

$\because e>2>\dfrac{27}{16}\therefore 2e>\dfrac{27}{8}\Rightarrow\sqrt[3]{2e}>\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}+(x_1-x_0)<\sqrt[3]{2e}+(x_1-x_0)<2\sqrt{x_1x_0}$，

$\because 2\sqrt{x_1x_0}\le 2x_1+\dfrac{x_0}{2}\therefore\dfrac{3}{2}+(x_1-x_0)<2x_1+\dfrac{x_0}{2}$，即有：$2x_1+3x_0>3$……12 分

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．作答时请写清题号．

22．解：

（1）由参数方程 $\begin{cases}x=\sqrt{2}+\sqrt{2}\cos\theta\\ y=1+\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}$，可得 C_1 的普通方程为

$\left(x-\sqrt{2}\right)^2+(y-1)^2=2$ …….4 分

（2）$\left(x-\sqrt{2}\right)^2+(y-1)^2=2$，令 $y=0$，

可得：$A\left(\sqrt{2}-1,0\right),B\left(\sqrt{2}+1,0\right)$……5 分

因为P,Q两点在圆O：$x^2+y^2=1$上，所以设$P\left(\cos\alpha,\sin\alpha\right),Q\left(\cos\beta,\sin\beta\right)$，

则$|PA|=\sqrt{\left(\cos\alpha-\left(\sqrt{2}-1\right)\right)^2+\sin^2\alpha}=\sqrt{4-2\sqrt{2}-2\left(\sqrt{2}-1\right)\cos\alpha}$

$=\sqrt{2}\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}-\cos\alpha\right)}$……7 分

同理可得，$|PB|=\sqrt{2}\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-\cos\alpha\right)}$ 所以$\dfrac{|PA|}{|PB|}=\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}=\sqrt{2}-1$……9 分

同理可得，$\dfrac{|QB|}{|QA|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$，

所以$\dfrac{|PA|}{|PB|}+\dfrac{|QB|}{|QA|}=2\sqrt{2}$ 为定值……12 分

23．解：

（1）$f\left(x\right)=\begin{cases}-3x+3,x\leqslant -1\\-x+5,-1<x<2\\3x-3,x\geqslant 2\end{cases}$……1 分

当$x\le -1$时，$-3x+3\ge 4$，可得：$x\le -\dfrac{1}{3},\therefore x\le -1$……2 分

当$-1<x<2$时，$-x+5\ge 4$，可得：$x\le 1,\therefore -1<x\le 1$……3 分

当$x\ge 2$时，$3x-3\ge 4$，可得：$x\ge \dfrac{7}{3},\therefore x\ge \dfrac{7}{3}$……4 分

综上所述，不等式$f\left(x\right)\ge 4$的解集为$\left(-\infty,1\right]\cup\left[\dfrac{7}{3},+\infty\right)$……5 分

（2）因为$\dfrac{a^2}{2b}+\dfrac{4b^2}{3c}+\dfrac{9c^2}{a}=3$，由柯西不等式，得：

$3\left(a+2b+3c\right)=\left[\left(\sqrt{2b}\right)^2+\left(\sqrt{3c}\right)^2+\left(\sqrt{a}\right)^2\right]\cdot\left[\left(\dfrac{a}{\sqrt{2b}}\right)^2+\left(\dfrac{2b}{\sqrt{3c}}\right)^2+\left(\dfrac{3c}{\sqrt{a}}\right)^2\right]$

$\ge\left(a+2b+3c\right)^2$……8 分

$\because a>0,b>0,c>0,\therefore a+2b+3c\le 3$，

而 $f(x)=|x+1|+|2x-4|=\begin{cases}-3x+3, x\leqslant -1\\ -x+5, -1<x<2\\ 3x-3, x\geqslant 2\end{cases}$，

可得最小值为3，当且仅当 $x=2$ 时取到，

综上可知，对任意 $x\in R$ 有不等式 $f(x)\geq a+2b+3c$ 恒成立……10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》