机密★启用前(全国卷文科数学)

华大新高考联盟2022届高三3月教学质量测评

文科数学

命题:华中师范大学考试研究院

本试题卷共4页,共23题(含选考题)。满分150分,考试用时120分钟

★ 祝考试顺利 ★

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的学校、班级、姓名、准考证号填写在答题卷指定位置,认真核对与准考证号条形码上的信息是否一致,并将准考证号条形码粘贴在答题卷上的指定位置。

2. 选择题的作答:选出答案后,用2B铅笔把答题卷上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。答在试题卷上无效。

3. 非选择题的作答:用黑色墨水的签字笔直接答在答题卷上的每题所对应的答题区域内。答在试题卷上或答题卷指定区域外无效。

4. 考试结束,监考人员将答题卷收回。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 $z=2+\mathrm{i}(m-n\mathrm{i})$,其中 $m,n\in\mathbf{R}$,若 z 为纯虚数,则

A. $m\neq0,n=-2$　　B. $m\neq-2,n=0$　　C. $m=0,n\neq-2$　　D. $m=-2,n\neq0$

2. 设集合 $A=\{1,2,3,4,7\}$,$B=\{x\in\mathbf{N}\mid 2<x<5\}$,则

A. $A\cup B=B$　　B. $A\cap B=\{2,3,4\}$　　C. $\complement_A B=\{2,7\}$　　D. $B\subsetneqq A$

3. 函数 $f(x)=\dfrac{2x-3}{3x+1}$ 的值域

A. $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$　　B. $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$

C. $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$　　D. $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$

4. 已知 l,m,n 是空间中三条不同的直线,α,β 是空间中两个不同的平面,且 $m\subset\alpha,n\subset\alpha,l\subset\beta,m\cap n=A$,则"$\alpha\perp\beta$"是"$l\perp m,l\perp n$"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 均为单位向量,且 $2\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}$ 之间夹角的余弦值为

A. $-\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $-\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{4}$

6. 已知圆锥的表面积为 90π,母线与底面所成角为 θ,若 $\cos\theta=\frac{2}{3}$,则圆锥的体积为

A. 108π　　B. $36\sqrt{5}\pi$　　C. $36\sqrt{3}\pi$　　D. 72π

7. 十二平均律是我国明代音乐理论家和数学家朱载堉发明的. 明万历十二年(公元 1584 年),他写成《律学新说》,提出了十二平均律的理论. 十二平均律的数学意义是:在 1 和 2 之间插入 11 个数,使包含 1 和 2 的这 13 个数依次成递增的等比数列,记插入的 11 个数之和为 M,插入 11 个数后这 13 个数之和为 N,则依此规则,下列说法错误的是

A. 插入的第 8 个数为$\sqrt[3]{4}$　　B. 插入的第 5 个数是插入的第 1 个数的$\sqrt[3]{2}$倍

C. $M>3$　　D. $N<7$

8. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为 F_1,F_2,点 M,N 均在双曲线 C 的右支上,其中点 M 在第一象限,M,N,F_2 三点共线,且 $\cos\angle MF_2F_1=-\frac{1}{4}$,若$\angle MF_1N=\angle MNF_1$,则双曲线 C 的渐近线方程为

A. $y=\pm\sqrt{5}x$　　B. $y=\pm x$　　C. $y=\pm\sqrt{3}x$　　D. $y=\pm\sqrt{2}x$

9. 已知函数 $f(x)=\sin(\cos x)+\cos x$,现有如下说法:

①$f(x)$为偶函数;

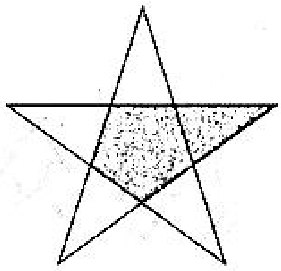
②函数 $f(x)$在$[\pi,2\pi]$上单调递增;

③$\exists x\in\mathbf{R},f(x)\geqslant 1+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

则上述说法正确的个数为

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

10. "黄金三角形"是几何历史上的瑰宝,它有两种类型,其中一种是顶角为 36°的等腰三角形,暂且称为"黄金三角形 A". 如图所示,已知五角星是由 5 个"黄金三角形 A"与 1 个正五边形组成,其中 $\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$,则往五角星内投掷一点,该点落在阴影区域内的概率为



第 10 题图

A. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{\sqrt{5}+1}{6}$　　D. $\frac{3\sqrt{5}}{20}$

11. 已知函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,图象关于原点对称,其导函数为 $f'(x)$,若当 $x>0$ 时 $f(x)+x\ln x\cdot f'(x)<0$,则不等式 $4^{|x|}\cdot f(x)>4f(x)$的解集为

A. $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$　　B. $(-1,0)\cup(0,+\infty)$

C. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$　　D. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$

12. 已知三棱锥 S-ABC 中,$SA\perp$平面 ABC,$SA=AB=BC=\sqrt{2}$,$AC=2$,点 E,F 分别是线段 AB,BC 的中点,直线 AF,CE 相交于点 G,则过点 G 的平面 α 与截三棱锥 S-ABC 的外接球 O 所得截面面积的取值范围为

A. $\left[\frac{8\pi}{9},2\pi\right]$　　B. $\left[\frac{8\pi}{9},\frac{3}{2}\pi\right]$　　C. $\left[\frac{2\pi}{3},\frac{3}{2}\pi\right]$　　D. $\left[\frac{2\pi}{3},2\pi\right]$

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 已知实数 x、y 满足$-2\leqslant x+2y\leqslant 3$,$-2\leqslant 2x-y\leqslant 0$,则 $3x-4y$ 的取值范围为________.

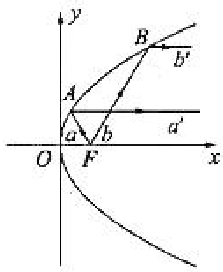
14. 已知下表所示的数据的回归直线为 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，则 $\hat{b}=$________.

i	1	2	3	4	5
x_i	3	5	7	9	11
y_i	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

参考公式：在线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中，$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

参考数据：$\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i=686$，$\sum\limits_{i=1}^{5}y_i=80$.

15. 抛物线具有以下光学性质：从焦点出发的光线经抛物线反射后平行于抛物线的对称轴. 该性质在实际生产中应用非常广泛. 如图所示，从抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 向 y 轴正方向发出的两条光线 a,b 分别经抛物线上的 A,B 两点反射，已知两条入射光线与 x 轴所成锐角均为 $60°$，且 $|FA|+|FB|=\dfrac{32}{3}$，则 $p=$________.



第 15 题图

16. 已知首项为 $\dfrac{1}{3}$ 的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_{n+1}+(2n+3)a_na_{n+1}=a_n+S_n$，则 $S_{98}=$________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答；第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 5 小题，每小题 12 分，共 60 分。

17.（12 分）

2021 年 11 月 7 日，在《英雄联盟》S11 的总决赛中，中国电子竞技俱乐部 EDG 完成逆转，斩获冠军，掀起了新一波电子竞技在中国的热潮. 为了调查 A 地 25 岁以下的年轻人的性别与对电子竞技的爱好程度是否具有相关性，研究人员随机抽取了 500 人作出调查，所得数据统计如下表所示：

	热爱电子竞技	对电子竞技无感
男性	200	50
女性	100	

（1）判断是否有 99.9%的把握认为 A 地 25 岁以下的年轻人的性别与对电子竞技的爱好程度有关？

（2）若按照性别进行分层抽样，从被调查的热爱电子竞技的年轻人中随机抽取 6 人，再从这 6 人中任取 2 人，求至少有 1 人是女生的概率.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

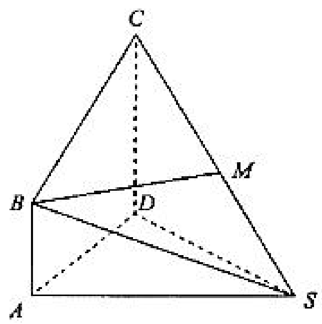
$P(K^2\geqslant k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

18.（12 分）

已知四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 如图所示，$\angle BAD=\angle ADC=90°$，平面 $SCD\perp$ 平面 $ABCD$，点 M 是线段 SC 的中点，直线 $l\perp$ 平面 SAD，$CD=2AB=2AD$，$\angle DCS=\angle DSC$.

(1)求证：$l\perp BM$；

(2)若 $BM\perp CD$，$AD=2$，求四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 的体积.



第 18 题图

19.（12 分）

已知$\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $\sin C=\sqrt{2}\sin B$，$C=2A$，$c=2$.

(1)求证：$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形；

(2)已知点 P 在$\triangle ABC$ 的内部，且 $PB=PC$，$PA=AC$，求 $\cos\angle PAB$.

20.（12 分）

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{1}{2}$，且过点$\left(-1,\frac{3}{2}\right)$.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)过点$(0,1)$且斜率为 k 的直线 l 与椭圆 C 交于 M,N 两点，且 $G(x_G,t)(t>\sqrt{3})$，若 $NG\perp x$ 轴，求证：存在实数 t，使得直线 MG 过 y 轴上的定点.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=a\ln x-x$.

(1)若 $a=3$，求曲线 $y=f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程；

(2)若关于 x 的不等式 $f(x)>\frac{a+1}{x}$在$\left[\frac{1}{e},1\right]$上能成立，求实数 a 的取值范围.

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22.[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

已知平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=\cos\varphi,\\y=1+\sin\varphi\end{cases}$（其中 φ 为参数，$\varphi\in(0,\pi)$），直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\y=-2+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数，α 为锐角）；以坐标原点为极点，x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，$A\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$.

(1)求曲线 C 的极坐标方程以及直线 l 的普通方程；

(2)记直线 l 与 x、y 轴的交点分别为 M,N，点 P 在曲线 C 上，直线 AP 的倾斜角为 2α，若 $S_{\triangle MNP}=4$，求 α 的值.

23.[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 $f(x)=|3x+6|+|x-4|$的最小值为 λ，

(1)求不等式 $f(x)\geqslant 10$ 的解集；

(2)若正数 m,n,p 满足 $6m+3n+2p=\lambda$，判断是否存在 $m,n\in(0,+\infty)$，使得 $16^{mn}=4$，若存在，请给出一组 m,n 的值，若不存在，请说明理由.

机密★启用前(全国卷文科数学)

华大新高考联盟 2022 届高三 3 月教学质量测评

文科数学参考答案和评分标准

一、选择题

1.【答案】A

【命题意图】本题考查复数的四则运算、复数的基本概念,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$z=2+\mathrm{i}(m-n\mathrm{i})=(n+2)+m\mathrm{i}$,故 $m\neq 0$,$n=-2$,故选 A.

2.【答案】D

【命题意图】本题考查集合的表示、集合的运算、集合间的基本关系,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$B=\{3,4\}$,故 $A\cup B=A$,$A\cap B=\{3,4\}$,$\complement_A B=\{1,2,7\}$,故 A、B、C 错误,故选 D.

3.【答案】D

【命题意图】本题考查函数的单调性与值域,考查直观想象、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$f(x)=\dfrac{2x-3}{3x+1}=\dfrac{2x+\frac{2}{3}-\frac{11}{3}}{3x+1}=\dfrac{\frac{2}{3}(3x+1)-\frac{11}{3}}{3x+1}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{11}{3}\cdot\dfrac{1}{3x+1}$,故函数 $f(x)$ 的值域为 $\left(-\infty,\dfrac{2}{3}\right)\cup\left(\dfrac{2}{3},+\infty\right)$,故选 D.

4.【答案】B

【命题意图】本题考查空间线面的位置关系、充要条件的判定,考查直观想象、逻辑推理的核心素养.

【解析】若 $l\perp m$,$l\perp n$,且 $m\subset\alpha$,$n\subset\alpha$,$m\cap n=A$,则 l α;而 $l\subset\beta$,故 $\alpha\perp\beta$;故 $l\perp m$,$l\perp n\Rightarrow\alpha\perp\beta$;反之不成立;故“$\alpha\perp\beta$”是“$l\perp m$,$l\perp n$”的必要不充分条件,故选 B.

5.【答案】C

【命题意图】本题考查平面向量的数量积,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{c}=4\boldsymbol{b}$,两边同平方,$(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{c})^2=16\boldsymbol{b}^2$,即 $4\boldsymbol{a}^2-12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+9\boldsymbol{c}^2=16\boldsymbol{b}^2$,设 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{c}$ 之间夹角为 θ,故 $-12\cos\theta=3$,则 $\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$,故选 C.

6.【答案】B

【命题意图】本题考查空间角、空间几何体的结构特征、空间几何体的表面积与体积,考查直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$\cos\theta=\dfrac{r}{l}=\dfrac{2}{3}$,故 $r=\dfrac{2}{3}l$;而 $\pi rl+\pi r^2=\dfrac{10}{9}\pi l^2=90\pi$,解得 $l=9$,则 $r=\dfrac{2}{3}l=6$,故圆锥的体积 $V=\dfrac{1}{3}Sh=\dfrac{1}{3}\times\pi\times 6^2\times\sqrt{81-36}=36\sqrt{5}\pi$,故选 B.

7.【答案】D

【命题意图】本题考查数学文化、等比数列的通项公式与前 n 项和公式,考查数学建模、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$a_1=1$,$a_{13}=2$,故 $q^{12}=2$,故 $a_9=a_1q^8=2^{\frac{8}{12}}=\sqrt[3]{4}$,故 A 正确;因为 $\dfrac{a_6}{a_2}=q^4=\sqrt[3]{2}$,故 B 正确;$M=\dfrac{a_2(1-q^{11})}{1-q}=\dfrac{\sqrt[12]{2}(1-\sqrt[12]{2^{11}})}{1-\sqrt[12]{2}}=\dfrac{2^{\frac{1}{12}}-1-1}{1-2^{\frac{1}{12}}}=-1-\dfrac{1}{1-2^{\frac{1}{12}}}$,要证 $M>3$,即证 $-1-\dfrac{1}{1-2^{\frac{1}{12}}}>3$,即证 $\dfrac{1}{2^{\frac{1}{12}}-1}>4$,

即证$\frac{5}{4}>2^{\frac{1}{12}}$,即证$\left(\frac{5}{4}\right)^{12}>2$,而$\left(\frac{5}{4}\right)^{12}>(1.5)^6>2$,故 C 正确;而 $N=M+3$,要证 $N>7$,即证 $M>4$,即证$-1-\frac{1}{1-2^{\frac{1}{12}}}>4$,即证$\frac{1}{2^{\frac{1}{12}}-1}>5$,即证$\frac{6}{5}>2^{\frac{1}{12}}$,即证$\left(\frac{6}{5}\right)^{12}>2$,而$\left(\frac{6}{5}\right)^{12}>(1.4)^6>(1.9)^3>2$,故 $N>7$,D 错误.故选 D.

8.【答案】C

【命题意图】本题考查双曲线的方程与性质,考查直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】因为$\angle MF_1N=\angle MNF_1$,故$|MF_1|=|MN|$;设$|MF_1|=x$,则$|MF_2|=x-2a$,则$|NF_2|=|MN|-|MF_2|=2a$,则$|NF_1|=4a$;在$\triangle NF_1F_2$中,由余弦定理,$|NF_1|^2=|F_1F_2|^2+|NF_2|^2-2|F_1F_2||NF_2|\cos\angle NF_2F_1$,化简可得,$2c^2-ac-6a^2=0$,即$2e^2-e-6=0$,解得$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=2$,则$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$,故双曲线 C 的渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$,故选 C.

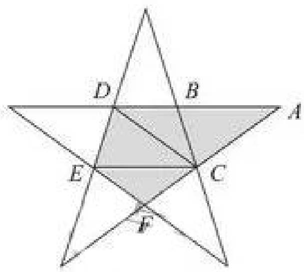
9.【答案】C

【命题意图】本题考查三角函数的图象与性质,考查直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$f(-x)=\sin[\cos(-x)]+\cos(-x)=\sin(\cos x)+\cos x=f(x)$,故函数 $f(x)$ 为偶函数,故①正确;易知 $f(x+2\pi)=f(x)$,故 2π 为函数 $f(x)$ 的一个周期;当 $x\in[0,\pi]$ 时,$\cos x\in[-1,1]$,故 $y=\sin(\cos x)$,$y=\cos x$ 在$[0,\pi]$上单调递减,即 $f(x)=\sin(\cos x)+\cos x$ 在$[0,\pi]$上单调递减,由对称性可知,函数 $f(x)$ 在$[\pi,2\pi]$上单调递增,故②正确;结合②中单调性以及函数的奇偶性可知,函数 $f(x)$ 的最大值为 $f(0)=\sin 1+1<1+\sin\frac{5\pi}{12}=1+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,故③错误;故选 C.

10.【答案】B

【命题意图】本题考查数学文化、几何概型,考查直观想象、数学建模、数学运算、逻辑推理的核心素养.



第 10 题图

【解析】依题意,$\sin 18^\circ=\frac{\frac{BC}{2}}{AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$,故$\frac{BD}{AB}=\frac{BC}{AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$;设$\triangle ABC$ 的面积为 x,则$\triangle BCD$ 和$\triangle CEF$ 的面积均为$\frac{\sqrt{5}-1}{2}x$,$\triangle CDE$ 的面积为 x,则往五角星内投掷一点,该点落在阴影区域内的概率 $P=\frac{2x+2\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}x}{2\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}x+6x}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,故选 B.

11.【答案】C

【命题意图】本题考查函数的图象与性质、导数的几何意义,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】当 $x>0$ 时,$f(x)+x\ln x\cdot f'(x)<0\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}+\ln x\cdot f'(x)<0\Leftrightarrow[\ln x\cdot f(x)]'<0$,故函数 $g(x)=\ln x\cdot f(x)$ 在$(0,+\infty)$上单调递减,易知 $g(1)=0$,故当 $x\in(0,1)$ 时,$g(x)>0$,$f(x)<0$,当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$g(x)<0$,$f(x)<0$;而 $4^{|x|}\cdot f(x)>4f(x)\Leftrightarrow f(x)\cdot[4^{|x|}-4]>0$,而 $h(x)=f(x)\cdot[4^{|x|}-4]$ 为奇函数,则当 $x>0$ 时,当 $f(x)\cdot[4^{|x|}-4]>0$ 的解为 $0<x<1$,故当 $x\in\mathbf{R}$ 时,$f(x)\cdot[4^{|x|}-4]>0$ 的解为 $x<-1$ 或 $0<x<1$,故不等式 $4^{|x|}\cdot f(x)>4f(x)$ 的解集为$(-\infty,-1)\cup(0,1)$,故选 C.

12.【答案】B

【命题意图】本题考查空间线面的位置关系、空间几何体的表面积与体积,考查直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】因为 $AB^2+BC^2=AC^2$，故 $AB\perp BC$，故三棱锥 $S\text{-}ABC$ 的外接球 O 的半径 $R=\frac{\sqrt{2+2+2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$；取 AC 的中点 D，连接 BD 必过点 G，因为 $AB=BC=\sqrt{2}$，故 $DG=\frac{1}{3}BD=\frac{1}{3}$，因为 $OD=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 $OG^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{11}{18}$，则过点 G 的平面截球 O 所得截面圆的最小半径 $r^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2-\frac{11}{18}=\frac{8}{9}$，故截面面积的最小值为 $\frac{8\pi}{9}$，最大值为 $\pi R^2=\frac{3}{2}\pi$，故选 B.

二、填空题

13.【答案】$[-7,2]$.

【命题意图】本题考查不等式的性质，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】设 $3x-4y=m(x+2y)+n(2x-y)$，故 $\begin{cases}m+2n=3,\\2m-n=-4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-1,\\n=2,\end{cases}$ 故 $3x-4y=-(x+2y)+2(2x-y)$；而 $-3\leqslant-(x+2y)\leqslant2$，$-4\leqslant2(2x-y)\leqslant0$，故 $-7\leqslant3x-4y\leqslant2$.

14.【答案】3.15$\left(3\frac{3}{20}\text{或}\frac{63}{20}\text{也正确}\right)$.

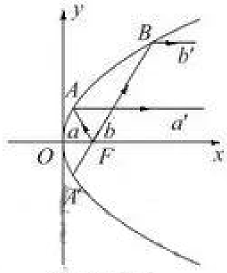
【命题意图】本题考查线性回归方程及其应用，考查数据分析、数学运算、数学建模的核心素养.

【解析】$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=(3-7)^2+(5-7)^2+(9-7)^2+(11-7)^2=40$，而 $\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\bar{y}=686-7\times80=126$，故 $\hat{b}=\frac{126}{40}=3.15$.

15.【答案】4.

【命题意图】本题考查抛物线的方程、直线与抛物线综合性问题，考查直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】如图所示，延长 BF 交抛物线 C 于点 A'，则 $|FA|+|FB|=|A'B|=\frac{32}{3}=\frac{2p}{\sin^2 60^\circ}$，解得 $p=4$.



第 15 题图

16.【答案】$\frac{14651}{19800}$.

【命题意图】本题考查数列的递推公式、数列求和，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$(2n+3)a_na_{n+1}=a_n-a_{n+1}$，则 $2n+3=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_na_{n+1}}$，故 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2n+3$，则 $\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=2n+1$，$\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_{n-2}}=2n-1$，…，$\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}=5$，累加可得，$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_1}=\frac{(2n+1+5)(n-1)}{2}$，故 $a_n=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$，$S_{98}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{98}-\frac{1}{100}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)=\frac{14651}{19800}$.

三、解答题

17.【命题意图】本题考查独立性检验、古典概型的概率，考查数学运算、数学建模、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)完善表格如下所示：

	热爱电子竞技	对电子竞技无感	总计
男性	200	50	250
女性	100	150	250
总计	300	200	500

…………………………………………………… (2分)

则 K^2 的观测值 $k=\dfrac{500\times(200\times150-100\times50)^2}{250\times250\times300\times200}=\dfrac{250}{3}\approx83.333>10.828$；……（5分）

有 99.9% 的把握认为 A 地 25 岁以下的年轻人的性别与对电子竞技的爱好程度有关；……（6分）

(2)从热爱电子竞技的年轻人中随机抽取 6 人，其中男生 4 人记为 a,b,c,d，女生 2 人，记为 A,B，则任取 2 人，所有的情况为 $(A,B),(A,a),(A,b),(A,c),(A,d),(B,a),(B,b),(B,c),(B,d),(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(c,d)$，共 15 种，……（9分）

其中满足条件的为 $(A,B),(A,a),(A,b),(A,c),(A,d),(B,a),(B,b),(B,c),(B,d)$，共 9 种，……（10分）

故所求概率 $P=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$. ……（12分）

18.【命题意图】本题考查空间线面的位置关系、空间几何体的表面积与体积，考查直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)证明：取 SD 的中点 G，连接 GM，GA，

因为 M 为线段 SC 的中点，故 $GM/\!/CD$，且 $GM=\dfrac{1}{2}CD$；……（2分）

又 $\angle BAD=\angle ADC=90^\circ$，故 $CD/\!/AB$，而 $CD=2AB$，故 $GM/\!/AB$，且 $GM=AB$，

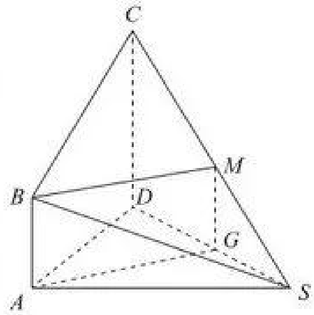
故四边形 $ABMG$ 为平行四边形，故 $BM/\!/AG$，……（5分）

因为直线 l 平面 SAD，$AG\subset$ 平面 SAD，故 $l\perp AG$，故 $l\perp BM$. ……（6分）

(2)因为 $BM\perp CD$，故 $AG\perp CD$. ……（7分）

又 $AD\perp CD$，$AD\cap AG=A$，故 CD 平面 SAD. ……（8分）

而 $SD\subset$ 平面 SAD，故 $CD\perp SD$. ……（9分）



第 18 题图

又平面 $SCD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $SCD\cap$ 平面 $ABCD=CD$，$SD\subset$ 平面 SCD，

故 $SD\perp$ 平面 $ABCD$，故 SD 为四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 的高. ……（10分）

又 $\because\angle DCS=\angle DSC$，$\therefore CD=SD=4$，

故 $V_{SABCD}=\dfrac{1}{3}S_{\text{四边形}ABCD}\cdot SD=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot(AB+CD)\cdot AD\cdot SD=8$. ……（12分）

19.【命题意图】本题考查正弦定理、余弦定理、三角恒等变换，考查直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】(1)依题意，$\sin C=\sin 2A=2\sin A\cos A$，即 $c=2a\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，……（1分）

而 $\sin C=\sqrt{2}\sin B$，故 $c=\sqrt{2}b$，故 $a^3-2\sqrt{2}=6a-6\sqrt{2}$. ……（2分）

即 $(a-\sqrt{2})(a^2+\sqrt{2}a+2)=6(a-\sqrt{2})$，化简可得 $(a-\sqrt{2})^2(a+2\sqrt{2})=0$，

因为 $a>0$，故 $a=\sqrt{2}=b$. ……（4分）

而 $a^2+b^2=c^2$，故 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形. ……（5分）

(2)由(1)可知，$C=\dfrac{\pi}{2}$，设 $\angle PAC=\alpha$，其中 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，

而 $PA=AC$，则 $\angle PCA=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{2}$，$\angle PCB=\dfrac{\alpha}{2}$. ……（6分）

取 BC 的中点 D，则 $PD\perp BC$，故 $PC=\dfrac{\sqrt{2}}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$. ……（7分）

又 $AP=AC=\sqrt{2}$，在△APC 中，由正弦定理，$\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}}{\sin\alpha}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}$. ……（9分）

化简可得，$\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$. ……（10分）

因为 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，即 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$，……（11分）

故 $\cos\angle PAB=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. ……（12分）

20.【命题意图】本题考查椭圆的方程、直线与椭圆综合性问题，考查直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】(1)依题意，$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{9}{4b^2}=1,\\ a^2-b^2=c^2,\end{cases}$ ……（2分）

解得 $a^2=4,b^2=3$，故椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ……（4分）

(2)当 $M(-2,0)$，$N\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$，$G(1,t)$时，直线 MG 的方程为 $y=\dfrac{t}{3}(x+2)$，交 y 轴于点$\left(0,\dfrac{2}{3}t\right)$；

当 $M\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$，$N(-2,0)$，$G(-2,t)$时，直线 MG 的方程为 $y-\dfrac{3}{2}=\dfrac{t-\frac{3}{2}}{-3}(x-1)$，交 y 轴于点$\left(0,\dfrac{t+3}{3}\right)$.

若直线 MG 经过 y 轴上定点，则$\dfrac{2}{3}t=\dfrac{t+3}{3}$，即 $t=3$，直线 MG 交 y 轴于点$(0,2)$. ……（6分）

下面证明存在实数 $t=3$，使得直线 MG 经过 y 轴上定点$(0,2)$.

联立$\begin{cases}y=kx+1,\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 消 y 整理，得 $(4k^2+3)x^2+8kx-8=0$，

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{-8k}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\dfrac{-8}{4k^2+3}$. ……（8分）

设点 $G(x_2,3)$，所以直线 MG 的方程：$y-3=\dfrac{y_1-3}{x_1-x_2}(x-x_2)$. ……（9分）

令 $x=0$，得 $y=\dfrac{-x_2y_1+3x_2}{x_1-x_2}+3=\dfrac{3x_1-x_2y_1}{x_1-x_2}=\dfrac{3x_1-x_2(kx_1+1)}{x_1-x_2}=\dfrac{3x_1-x_2-kx_1x_2}{x_1-x_2}$.

因为 $kx_1x_2=x_1+x_2$，所以 $y=\dfrac{3x_1-x_2-(x_1+x_2)}{x_1-x_2}=\dfrac{2x_1-2x_2}{x_1-x_2}=2$. ……（11分）

所以直线 MG 过定点$(0,2)$.

综上所述，存在实数 $t=3$，使得直线 MG 经过 y 轴上定点$(0,2)$. ……（12分）

21.【命题意图】本题考查利用导数研究函数的性质，考查直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)依题意，$f(x)=3\ln x-x$，故 $f'(x)=\dfrac{3}{x}-1$. ……（1分）

则 $f'(1)=2$；而 $f(1)=-1$，……（2分）

故所求切线方程为 $y+1=2(x-1)$，即 $y=2x-3$. ……（4分）

(2)依题意，$f(x)>\dfrac{a+1}{x}\Leftrightarrow\dfrac{a+1}{x}-f(x)<0\Leftrightarrow\dfrac{a+1}{x}-a\ln x+x<0$，

令 $g(x)=\frac{a+1}{x}-a\ln x+x, x\in\left[\frac{1}{e},1\right]$，则函数 $g(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e},1\right]$ 上的最小值小于 0，

$g'(x)=1-\frac{a}{x}-\frac{a+1}{x^2}=\frac{(x+1)[x-(a+1)]}{x^2}$. ………………………… (5 分)

①当 $1+a\geqslant 1$，即 $a\geqslant 0$ 时，$g(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e},1\right]$ 上单调递减，所以函数 $g(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e},1\right]$ 上的最小值为 $g(1)=1+a+1=a+2<0$，故 $a<-2$，不合题意，舍去. ………………………… (7 分)

②当 $1+a\leqslant\frac{1}{e}$，即 $a\leqslant\frac{1}{e}-1$ 时，$g(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e},1\right]$ 上单调递增，所以函数 $g(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e},1\right]$ 上单调递增，所以 $g(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e},1\right]$ 上的最小值为 $g\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}+a+e(a+1)=(e+1)a+e+\frac{1}{e}<0$，解得 $a<-\frac{e^2+1}{e(e+1)}$；

又 $a\leqslant\frac{1}{e}-1$，故 $a<-\frac{e^2+1}{e(e+1)}$. ………………………… (9 分)

③当 $\frac{1}{e}<1+a<1$ 时，即 $\frac{1}{e}-1<a<0$ 时，故 $g(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e},1+a\right]$ 上单调递减，在 $[1+a,1]$ 上单调递增；所以 $g(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e},1\right]$ 上的最小值为 $g(1+a)=a+1+1-a\ln(a+1)=a[1-\ln(a+1)]+2$.

因为 $\frac{1}{e}<1+a<1$，所以 $-1<\ln(a+1)<0$，所以 $1<1-\ln(a+1)<2$，

所以 $a>a[1-\ln(a+1)]>2a$，所以 $f(1+a)=a[1-\ln(a+1)]+2>2a+2>0$，不合题意，舍去.
………………………… (11 分)

综上所述，实数 a 的取值范围为 $a<-\frac{e^2+1}{e(e+1)}$. ………………………… (12 分)

22.【命题意图】本题考查参数方程、极坐标方程的转化，考查直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)依题意，直线 l 的普通方程为 $y=x\tan\alpha-2, \alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. ………………………… (1 分)

而曲线 $C: x^2+(y-1)^2=1$，即 $x^2+y^2-2y=0$，故 $\rho^2=2\rho\sin\theta$. ………………………… (3 分)

而 $\varphi\in(0,\pi)$，$\cos\varphi\in(-1,1)$，则 $\theta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，

故曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta, \theta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$. ………………………… (5 分)

(2)由题意可知，$A(0,1)$，$M\left(\frac{2}{\tan\alpha},0\right)$，$N(0,-2)$，$P(\cos 2\alpha, 1+\sin 2\alpha)$，

点 P 到直线 MN 的距离为 $d=\frac{|\tan\alpha\cdot\cos 2\alpha-(1+\sin 2\alpha)-2|}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$

$=|\sin\alpha\cos 2\alpha-\cos\alpha\sin 2\alpha-3\cos\alpha|=\sin\alpha+3\cos\alpha$， (7 分)

$|MN|=\sqrt{(-2)^2+\left(\frac{2}{\tan\alpha}\right)^2}=\frac{2}{\sin\alpha}$， ………………………… (8 分)

故 $S_{\triangle MNP}=\frac{1}{2}\cdot|MN|\cdot d=1+\frac{3}{\tan\alpha}=4$，解得 $\tan\alpha=1$.

又 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\alpha=\frac{\pi}{4}$. ………………………… (10 分)

23.【命题意图】本题考查绝对值不等式的性质、基本不等式、柯西不等式，考查逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】(1)依题意，$|3x+6|+|x-4|\geqslant 10$，

当 $x<-2$ 时，$-3x-6-x+4\geqslant 10$，得 $x\leqslant -3$，故 $x\leqslant -3$； ………………………… (2 分)

当 $-2\leqslant x\leqslant 4$ 时，$3x+6-x+4\geqslant 10$，得 $x\geqslant 0$，故 $0\leqslant x\leqslant 4$； ………………………… (3 分)

当 $x>4$ 时，$3x+6+x-4\geqslant 10$，得 $x\geqslant 2$，解得 $x>4$. ······························ (4 分)

综上所述，不等式 $f(x)\geqslant 10$ 的解集为 $\{x\mid x\leqslant -3$ 或 $x\geqslant 0\}$. ······························ (5 分)

(2)由(1)可知，$\lambda=6$. ······························ (6 分)

故 $6m+3n+2p=6$，则 $m+\frac{n}{2}+\frac{p}{3}=1$. ······························ (7 分)

而 $mn=2m\cdot\frac{n}{2}\leqslant 2\left(\frac{m+\frac{n}{2}}{2}\right)^2<2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$，故 $16^{mn}<16^{\frac{1}{2}}=4$. ······························ (9 分)

当且仅当 $m=\frac{n}{2}$ 时等号成立，

故不存在 $m,n\in(0,+\infty)$，使得 $16^{mn}=4$. ······························ (10 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。