

全国名校联考

2023 届高三第三次联考试卷

数 学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必使用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上对应题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。
4. 本试卷命题范围：集合、常用逻辑用语、函数、导数及其应用、三角函数、三角恒等变换、解三角形、平面向量、数列、不等式。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | -5 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x | \frac{x}{x+1} > 0\}$, 则 $A \cup (\complement_{\mathbb{R}} B) =$
 A. $\{x | x \leq 3\}$ B. $\{x | x > -5\}$
 C. $\{x | -5 \leq x \leq -1\}$ D. $\{x | -1 < x \leq 3\}$
2. 已知 $a, b \in \mathbb{R}$, 则“ $a=2$ ”是“函数 $f(x) = (x+2-a)^2 + b$ 为偶函数”的
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
3. 若 $a < b < 0 < c$, 则下列不等式一定成立的是
 A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ B. $\frac{b}{a} < \frac{c}{c-a}$ C. $ab > c^2$ D. $ac > bc$
4. 已知 $a_n = n \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的偶数项中最大项为
 A. a_{10} B. a_8 C. a_6 D. a_4
5. 已知 $\tan(\theta + \frac{\pi}{12}) = 3$, 则 $\tan(2\theta - \frac{5\pi}{6}) =$
 A. $-\frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $-\frac{3}{5}$ D. $\frac{3}{5}$
6. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1 = 2, a_{m+n} = a_m a_n$, 若 $S_{k+11} - S_k = 2^{22} - 2^{11}$, 则 $k =$
 A. 5 B. 10 C. 11 D. 22
7. 如图, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD, AB \perp AD, AB = 3, AD = CD = 2$, F 是 BC 的中点, E 是 AB 上靠近点 B 的三等分点, 则 $\vec{EF} \cdot \vec{AC} =$
 A. 3 B. 4 C. 5 D. 6



8. 已知数列 $\{r_n\}$ 满足 $r_1 = -3, r_{2n} = r_{2n-1} + 4^n, r_{2n+1} = r_{2n} + \sin \frac{2n-1}{2}\pi$, 其中 $n \in \mathbb{N}^*$, 则 $r_{1000} =$

A. $\frac{4^{500} - 10}{3}$

B. $\frac{4^{500} - 13}{3}$

C. $\frac{4^{501} - 10}{3}$

D. $\frac{4^{501} - 13}{3}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合要
求, 全部选对的得 5 分, 选对但不全的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 若 $a > 0, b > 0, ab = 2$, 则 $\frac{a^2 + b^2 + 13}{a + b}$ 的值可以为

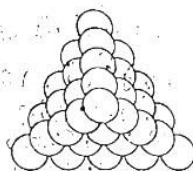
A. 3

B. $4\sqrt{2}$

C. 6

D. $2\sqrt{13}$

10. 朱世杰(1249 年—1314 年), 字汉卿, 号松庭, 元代数学家、教育家, 毕生从事数学教育, 有“中世纪世界最伟大的数学家”之誉。他的一部名著《算学启蒙》是中国最早的科普著作, 该书中有名的是“堆垛问题”, 其中有一道问题如下: 今有三角锥垛果子, 每面底子四十四个, 问共积几何? 含义如下: 把一样大小的果子堆垛成正三棱锥形(如图所示, 给出了 5 层三角锥垛从上往下看的示意图), 底面每边 44 个果子, 顶部仅一个果子, 从顶层向下数, 每层的果子数分别为 1, 3, 6, 10, 15, ..., 共有 44 层, 问全垛共有多少个果子? 现有一个 n 层三角锥垛, 设从顶层向下数, 每层的果子数组成数列 $\{a_n\}$, 其前 n 项和为 S_n , 则



三角锥垛

(参考公式: $1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$)

A. $a_7 = 27$

B. $\{a_n - a_{n-1}\} (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$ 是等差数列

C. 函数 $f(n) = \frac{S_n}{a_n} (n \in \mathbb{N}^*)$ 单调递增

D. 原书中该“堆垛问题”的结果为 15 080

11. 若函数 $f(x) = \sqrt{|\sin x| - |\cos x|}$, 则下列结论错误的是

A. $f(x)$ 的定义域是 $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi] \cup [\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi) (k \in \mathbb{Z})$

B. $f(x)$ 的单调递增区间是 $[\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi] (k \in \mathbb{Z})$

C. $f(x)$ 的值域是 $[0, 1]$

D. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 对称

12. 已知函数 $f(x) = (a-m)e^{2x} + (m-a)xe^x + x^2$ 有三个零点 x_1, x_2, x_3 , 且满足 $x_1 < 0 < x_2 < x_3$, 其中

a, m 是常数, e 是自然对数的底数, 则 $m-a \left(\frac{x_1}{e^{x_1}} - 1\right)^4 \left(\frac{x_2}{e^{x_2}} - 1\right)^2 \left(\frac{x_3}{e^{x_3}} - 1\right)^2$ 的值不可能是

A. $\frac{1}{e-1}$

B. $\frac{e}{e-1}$

C. $\frac{1}{e^2-1}$

D. $\frac{1}{e^2-e}$

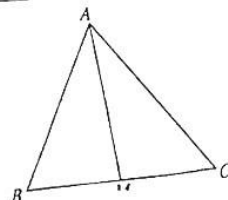
三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知向量 $m = (-1, \lambda), n = (2, -4)$, 若 m 与 n 共线, 则 $|m+n| =$ _____.

14. 已知数列 $\{d_n\}$ 满足 $d_1 = 3, (d_{n+1} + 1)(1 - d_n) = 2$, 则 $d_{2023} =$ _____.

15. $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $A = \frac{\pi}{3}$, 角 A 的平分线

交 BC 于点 $M, 4b + 9c$ 的最小值为 $25\sqrt{3}$, 则 $AM =$ _____.



16. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n} - a_n = 1, a_1 = 1$, 数列 $\left\{\frac{1}{a_n+1}\right\}$ 的前 n 项和为

R_n , 若对所有正整数 $n, n^2 + n + t(R_n + \frac{1}{a_{n+1}}) \geq 0$ 恒成立, 则实数 t 的取值范围是 _____.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且 $a \sin(A - B) = b \sin A \cos C - c \sin A \cos B$ 。

(1) 求角 B ；

(2) 若 $b=10$ ，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值。

18. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且满足 $a_{n+1} - S_n - 4 = 0, a_1 = 4$ 。

(1) 证明：数列 $\{a_n\}$ 是等比数列；

(2) 求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

19. (本小题满分 12 分)

已知函数 $h(x) = ax^2 + ax + 2$ 。

(1) 若对于任意 $x \in \mathbf{R}$ ，不等式 $h(x) > -1$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

(2) 当 $a \leq 0$ 时，解关于 x 的不等式 $h(x) < (1-a)x + 4$ 。



20. (本小题满分 12 分)

已知各项均不相等的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_2 + a_4 = 20, S_4 = 30$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $b_n = \log_2 a_n, c_n = \frac{1}{b_{n+1} b_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

21. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3, a_{n+1} = 3a_n + 3^{n+1} (n \in \mathbb{N}^*)$, 记 $b_n = \frac{a_n}{n} - 1$.

(1) 判断数列 $\left\{\frac{b_n}{b_{n+1}}\right\}$ 的单调性;

(2) 证明: $\frac{b_1}{b} + \frac{b_2}{b+1} + \dots + \frac{b_n}{b+n} > \frac{n}{3} - \frac{1}{6}$.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln \frac{1}{1+x} + a \sin x$, 其中 $a > 1$. 证明:

(1) 函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 0)$ 上有 1 个极值点;

(2) 函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, \pi)$ 上仅有 3 个零点.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线