高三数学考试参考答案

1. D　因为 $A=\{x|x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 2\}$，所以 $A\cap B=\{-2,-1\}$.

2. B　因为 $z=\frac{2}{1-i}+i=1+i+i=1+2i$，所以 $z-\bar{z}=1+2i-1+2i=4i$.

3. A　若 $a>|b|$，则 $a^2>b^2$，$\ln(a^2+1)>\ln(b^2+1)$，若 $\ln(a^2+1)>\ln(b^2+1)$，则 $a^2+1>b^2+1$，即 $|a|>|b|$，当 $a<0$ 时，推不出 $a>|b|$，所以“$a>|b|$”是“$\ln(a^2+1)>\ln(b^2+1)$”的充分不必要条件.

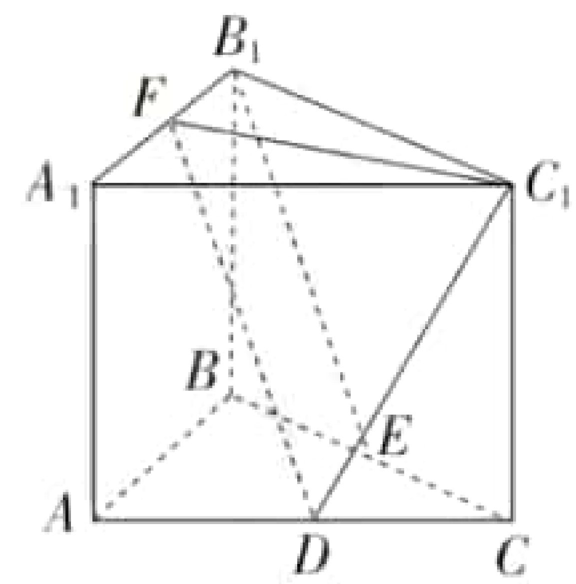
4. B　因为 $(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=1-\frac{9}{a^2}$，所以 $a=6$.

5. A　由 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，得 $\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\alpha$. 因为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以 $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，则 $\sin 2\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

6. D　设 $AB=2$，取 A_1B_1 的中点 F，连接 C_1F，DF，则 $DF\parallel B_1E$，$\angle C_1DF$ 为异面直线 C_1D 与 B_1E 所成的角或补角.

易求 $DF=B_1E=\sqrt{5}$，$C_1F=\sqrt{5}$，$C_1D=\sqrt{6}$，

所以 $\cos\angle C_1DF=\frac{\frac{1}{2}C_1D}{DF}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{30}}{10}$.



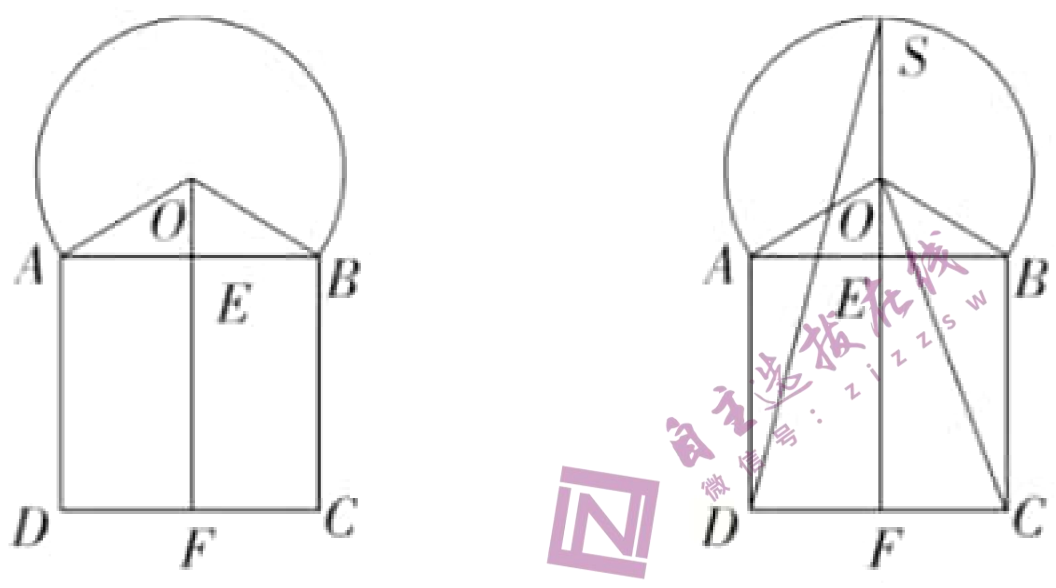
7. C　因为 $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}[p\overrightarrow{AB}+(1-p)\overrightarrow{AC}]=\frac{2}{3}p\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(1-p)\overrightarrow{AC}$，所以 $\lambda=\frac{2}{3}p$，$\mu=\frac{2}{3}(1-p)$，则 $\lambda+\mu=\frac{2}{3}$.

8. B　由 $y\ln y=e^{2x}-y\ln(2x)$，得 $y\ln y+y\ln(2x)=e^{2x}(x>0,y>0)$，则 $y\ln(2xy)=e^{2x}$，所以 $2xy\ln(2xy)=2xe^{2x}$，即 $e^{\ln(2xy)}\ln(2xy)=2xe^{2x}$. 设 $f(x)=xe^x(x>0)$，则 $f'(x)=(x+1)e^x>0$，可知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，所以 $\ln(2xy)=2x$，则 $2xy=e^{2x}$，即 $y=\frac{e^{2x}}{2x}$. 令 $g(x)=\frac{e^{2x}}{2x}$，则 $g'(x)=\frac{(2x-1)e^{2x}}{2x^2}$，所以 $g(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上为减函数，在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 上为增函数，可得 $y_{\min}=g(x)_{\min}=g(\frac{1}{2})=e$.

9. ABC　由题意可知，$2\times 3+a=5$，$a=-1$，故 A 错误；易知乙组样本数据的方差为甲组样本数据方差的 $2^2=4$ 倍，故 B 错误；不妨设 $x_1<x_2<\cdots<x_n$，则甲组数据的极差为 x_n-x_1，乙组数据的极差为 $(2x_n-1)-(2x_1-1)=2(x_n-x_1)$，所以两组样本数据的极差不同，故 C 错误；设甲组样本数据的中位数为 m，则乙组样本数据的中位数为 $2m-1$，所以两组样本数据的中位数可能相同，故 D 正确.

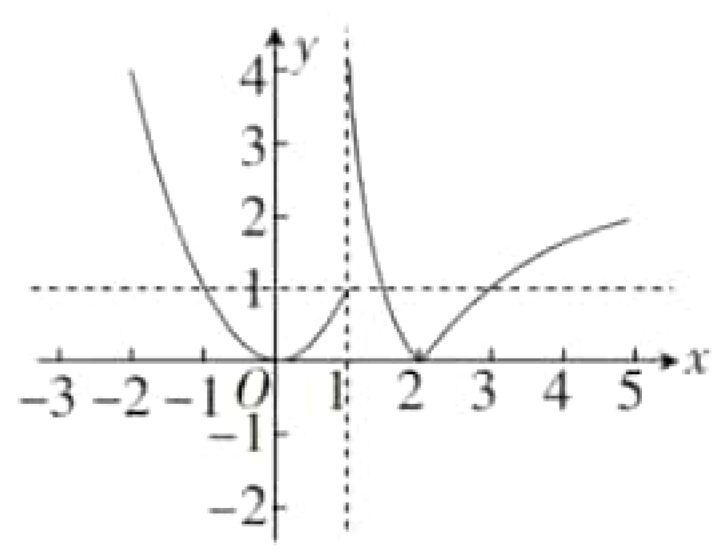
10. AB　原文 a,b 对应的数字分别为 0，1，每个数乘以 3 加 1 后变为数字 1，4，除以 26 得到的余数分别为 1，4，所以密文为 be，A 正确. 假设密文对应的数为 Y，则 $\frac{Y+26k-1}{3}=X$，$k\in\mathbf{N}$，密文 b 对应的 $Y=1$，当 $k=0$ 时，得 $X=0$，原文是 a；密文 e 对应的 $Y=4$，当 $k=0$ 时，得 $X=1$，原文是 b，即密文 be 的原文是 ab，B 正确. 密文为 z，则 $\frac{25+26\times0-1}{3}=8$，所以原文为 i，C 错误. 假设存在某个字母加密后还是原字母，设这个字母对应的整数为 m，$0\leqslant m\leqslant25$，则 $3m+1=26k+m$，整理得 $m=13k-\frac{1}{2}$，无整数解，D 错误.

11. ACD　如图，设球缺的球心为 O，由已知可得半径 $R=15$ cm，



$AE=\frac{1}{2}AB=12$ cm，所以 $OE=\sqrt{OA^2-AE^2}=\sqrt{15^2-12^2}=9$ cm，所以 $SE=R+OE=24$ cm，A 正确；$OC=\sqrt{33^2+12^2}=3\sqrt{137}$ cm，所以石墩表面上两点间距离的最大值为 $OC+R=(3\sqrt{137}+15)$cm，B 错误；由前面的计算可知上部分球缺的高 $h=24$ cm，所以石墩的体积 $V=\frac{1}{3}\pi(3\times15-24)\times24^2+\pi\times12^2\times24=7488\pi$ cm^3，C 正确；设该球的半径为 r，则 $(48-r)^2+12^2=r^2$，解得 $r=\frac{51}{2}$ cm，D 正确.

12. BC　作出函数 $f(x)$ 的图象，如图所示，设 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=f(x_4)=t$，由图可知，当 $0<t<1$ 时，直线 $y=t$ 与函数 $f(x)$ 的图象有四个交点，交点的横坐标分别为 x_1,x_2,x_3,x_4，且 $x_1<x_2<x_3<x_4$，当 $x>1$ 时，令 $f(x)=|\log_2(x-1)|=1$，解得 $x=\frac{3}{2}$ 或 $x=3$.



由图可知，$x_1+x_2=0$，$\frac{3}{2}\leqslant x_3<2$，$2<x_4\leqslant3$. 由 $f(x_3)=f(x_4)$，可得 $-\log_2(x_3-1)=\log_2(x_4-1)$，所以 $x_3-1=\frac{1}{x_4-1}$，则有 $x_3=\frac{1}{x_4-1}+1$，所以 $\frac{4}{x_4+1}+(x_1+x_2+2)x_3=\frac{4}{x_4+1}+2x_3=\frac{4}{x_4+1}+\frac{2}{x_4-1}+2$.

令 $g(x)=\frac{4}{x+1}+\frac{2}{x-1}+2$，易知 $g(x)$ 在 $(2,3]$ 上为减函数，且 $g(2)=\frac{16}{3}$，$g(3)=4$，故 $4\leqslant\frac{4}{x_4+1}+(x_1+x_2+2)x_3<\frac{16}{3}$，且 $4\in[4,\frac{16}{3})$，$5\in[4,\frac{16}{3})$.

13. 4　设切点为 C，圆心为 O，则 $|PO|=3\sqrt{2}$，$|PC|=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-2}=4$.

14. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　根据图象可以得到 $A=1$，$T=4\times(\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{\pi}{6})=\pi$，所以 $\omega=2$，$f(x)=\sin(2x+\varphi)$. 因为 $f(\dfrac{5\pi}{12})=1$，所以$\dfrac{5\pi}{6}+\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $\varphi=2k\pi-\dfrac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$.

又 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$，$f(x)=\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$，$f(0)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

15. 480　由题意可知，当志愿组有 3 名男生，2 名女生时，有 $C_5^3C_3^2C_3^1C_2^1A_2^2=360$ 种方法；当志愿组有 4 名男生，1 名女生时，有 $C_5^4C_3^1C_4^1A_2^2=120$ 种方法. 共有 $360+120=480$ 种不同的选法.

16. a^2-b^2　设 $P(x_0,y_0)$，则$\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$，切线 l：$\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=1$，$l_1$：$y=\dfrac{b}{a}x$，$l_2$：$y=-\dfrac{b}{a}x$，联立方程组$\begin{cases}\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=1,\\ y=\dfrac{b}{a}x,\end{cases}$解得 $M(\dfrac{a^2b}{bx_0-ay_0},\dfrac{ab^2}{bx_0-ay_0})$，同理可得 $N(\dfrac{a^2b}{bx_0+ay_0},\dfrac{-ab^2}{bx_0+ay_0})$，所以 $x_1x_2+y_1y_2=a^2-b^2$.

17. 解：(1)由 $a\sin A-1=\cos A$，得 $2a\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}=2\cos^2\dfrac{A}{2}$. ………………………………… 1 分

又 $0<A<\pi$，可知 $\cos\dfrac{A}{2}\neq0$，所以$\sqrt{5}\sin\dfrac{A}{2}=\cos\dfrac{A}{2}$. ………………………………… 2 分

由 $\sin^2\dfrac{A}{2}+\cos^2\dfrac{A}{2}=1$，得 $\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，………………………………… 4 分

所以 $\cos A=1-2\sin^2\dfrac{A}{2}=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$. ………………………………… 5 分

(2)由 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得 $5=9+c^2-2\times3c\times\dfrac{2}{3}$，………………………………… 6 分

整理得 $(c-2)^2=0$，………………………………… 7 分

解得 $c=2$. ………………………………… 8 分

又 $\sin A=\sqrt{1-(\dfrac{2}{3})^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，………………………………… 9 分

所以 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times3\times2\times\dfrac{\sqrt{5}}{3}=\sqrt{5}$. ………………………………… 10 分

18. (1)证明：因为 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2-a_n}$，所以 $a_{n+1}-1=\dfrac{1}{2-a_n}-1=\dfrac{-1+a_n}{2-a_n}$，………………………………… 2 分

所以 $\dfrac{1}{a_{n+1}-1}=\dfrac{2-a_n}{a_n-1}=\dfrac{-(a_n-1)+1}{a_n-1}=-1+\dfrac{1}{a_n-1}$，即$\dfrac{1}{a_{n+1}-1}-\dfrac{1}{a_n-1}=-1$，……… 5 分

所以$\{\dfrac{1}{a_n-1}\}$是以 -1 为公差的等差数列. ………………………………… 6 分

(2)解：由(1)知$\dfrac{1}{a_1-1}=-1$，所以$\dfrac{1}{a_n-1}=-n$，可得 $a_n=1-\dfrac{1}{n}$，………………………………… 8 分

所以 $b_n=\dfrac{1-a_n}{n+1}=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$. ………………………………… 10 分

故 $T_n=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$. …………………… 12 分

19. (1)证明:因为 $PB\perp$平面 $ABCD$,所以 $PB\perp AB$. …………………………………………………… 1 分

在 Rt$\triangle PAB$ 中可求得 $AB=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$. ………………………………………………… 2 分

在$\triangle ABC$ 中,因为 $BC=1,AC=2$,所以 $AC^2+BC^2=5=AB^2$,

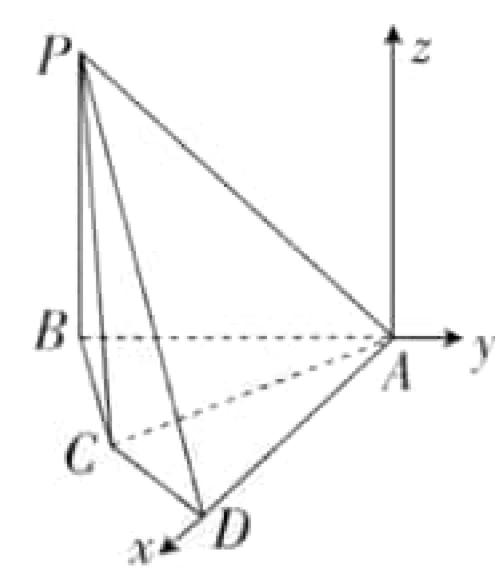
所以 $AC\perp BC$. ……………………………………………………………………………………… 3 分

又 $PB\perp$平面 $ABCD$,所以 $AC\perp PB$.

因为 $PB\cap BC=B$,所以 $AC\perp$平面 PBC. ……………………………………………………… 4 分

又 $AC\subset$平面 PAC,所以平面 $PAC\perp$平面 PBC. ………………………………………………… 5 分

(2)解:因为 $AB\perp AD$,$PB\perp$平面 $ABCD$,所以分别以$\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BP}$的方向为 x,y,z 轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系,则 $P(0,-\sqrt{5},2)$,$C(\frac{2\sqrt{5}}{5},-\frac{4\sqrt{5}}{5},0)$,$D(2,0,0)$,$\overrightarrow{AD}=(2,0,0)$,$\overrightarrow{AP}=(0,-\sqrt{5},2)$. ………………………………………………………………… 6 分



由(1)知 $AC\perp$平面 PBC,

所以$\overrightarrow{AC}=(\frac{2\sqrt{5}}{5},-\frac{4\sqrt{5}}{5},0)$为平面 PBC 的一个法向量. …………… 8 分

设平面 PAD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,可得$\begin{cases}2x=0,\\-\sqrt{5}y+2z=0,\end{cases}$

令 $y=2$,得 $\boldsymbol{n}=(0,2,\sqrt{5})$. ……………………………………………………………… 10 分

设平面 PBC 与平面 PAD 的夹角为 θ,

则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{AC}\rangle|=|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AC}|}|=\frac{4\sqrt{5}}{15}$. …………………………………………… 12 分

20. 解:(1)设要摸 n 次球,才能使摸到红球的概率不小于$\frac{65}{81}$.

由题意得 $1-(1-\frac{1}{3})^n\geqslant\frac{65}{81}$. ……………………………………………………………… 3 分

所以$(\frac{2}{3})^n\leqslant\frac{16}{81}=(\frac{2}{3})^4$, …………………………………………………………… 4 分

所以 $n\geqslant4$,即至少要摸 4 次球,才能使摸到红球的概率不小于$\frac{65}{81}$. ……………………… 5 分

(2)由题意可知,X 的可能取值为 0,2,4,6,14.

$P(X=0)=(1-\frac{1}{3})^3=\frac{8}{27}$, ……………………………………………………………… 6 分

$P(X=2)=C_3^1\times(1-\frac{1}{3})^2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$, ……………………………………………… 7 分

$P(X=4)=\frac{1}{3}\times(1-\frac{1}{3})\times\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$, ……………………………………………… 8 分

$P(X=6)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times(1-\frac{1}{3})+(1-\frac{1}{3})\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$, ………………………… 9 分

$P(X=14)=(\frac{1}{3})^3=\frac{1}{27}$， ………………………………………………………………… 10 分

所以 X 的分布列为

X	0	2	4	6	14
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{1}{27}$

……………………………………………………………………………………………… 11 分

$E(X)=0\times\frac{8}{27}+2\times\frac{4}{9}+4\times\frac{2}{27}+6\times\frac{4}{27}+14\times\frac{1}{27}=\frac{70}{27}$. ……………………………… 12 分

21. 解：(1)当 $k=\sqrt{2}$ 时，直线 l 的方程为 $y=\sqrt{2}(x-\frac{p}{2})$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$， ……… 1 分

联立方程组 $\begin{cases} y=\sqrt{2}(x-\frac{p}{2}), \\ y^2=2px, \end{cases}$ 消去 y 得 $x^2-2px+\frac{p^2}{4}=0$，

所以 $\Delta=4p^2-4\times\frac{p^2}{4}=3p^2$， ………………………………………………………… 2 分

所以 $|AB|=\sqrt{1+2}\times\frac{2\sqrt{3}p}{2}=6$， ……………………………………………… 3 分

解得 $p=2$， ………………………………………………………………………………… 4 分

所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$. …………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)知 $F(1,0)$，则 l：$y=k(x-1)$，不妨设 $A(x_1,2\sqrt{x_1})$，$B(x_2,-2\sqrt{x_2})$，线段 AB 的中点为 M，

联立方程组 $\begin{cases} y=k(x-1), \\ y^2=4x, \end{cases}$ 消去 y 得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$，

所以 $x_1+x_2=\frac{2k^2+4}{k^2}$，$x_1x_2=1$. ……………………………………………………… 6 分

易得 $M(\frac{k^2+2}{k^2},\frac{2}{k})$，则 AB 的中垂线方程为 $y-\frac{2}{k}=-\frac{1}{k}(x-\frac{k^2+2}{k^2})$， ……………… 7 分

令 $y=0$，得 $x=3+\frac{2}{k^2}$，所以 $P(3+\frac{2}{k^2},0)$，

所以 $d_1=\frac{2\sqrt{k^2+1}}{k}$. …………………………………………………………………… 8 分

切线 QA：$y=\frac{x}{\sqrt{x_1}}+\sqrt{x_1}$，$QB$：$y=\frac{x}{\sqrt{x_2}}-\sqrt{x_2}$.

联立方程组 $\begin{cases} y=\frac{x}{\sqrt{x_1}}+\sqrt{x_1}, \\ y=-\frac{x}{\sqrt{x_2}}-\sqrt{x_2}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=-\sqrt{x_1x_2}=-1, \\ y=\sqrt{x_1}-\frac{1}{\sqrt{x_1}}. \end{cases}$ ……………………… 9 分

由 $k^2x_1^2-(2k^2+4)x_1+k^2=0$，得 $x_1=(\frac{1+\sqrt{1+k^2}}{k})^2$，

所以 $\sqrt{x_1}=\frac{1+\sqrt{1+k^2}}{k}$，所以 $y=\sqrt{x_1}-\frac{1}{\sqrt{x_1}}=\frac{2}{k}$，即 $Q(-1,\frac{2}{k})$， …………………… 10 分

所以点 Q 到直线 $kx-y-k=0$ 的距离 $d_2=\frac{\left|-k-\frac{2}{k}-k\right|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{2\sqrt{1+k^2}}{k}$. …………… 11 分

故 $\frac{d_1}{d_2}=1$. ……………………………………………………………………………………… 12 分

22.(1)解：当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-x^2+x-1$， ………………………………………………… 1 分

则 $f'(x)=e^x-2x+1$， …………………………………………………………………………… 2 分

$f'(0)=2$， ……………………………………………………………………………………………… 3 分

$f(0)=0$， ……………………………………………………………………………………………… 4 分

故所求切线的方程为 $y=2x$. ………………………………………………………………………… 5 分

(2)证明：(法一)当 $a\geqslant1,x>0$ 时，要证 $f(x)+\cos x=a(e^x-1)-x^2+x+\cos x>1$，只需证 $e^x-1-x^2+x+\cos x>1$， …………………………………………………………………………… 6 分

即要证 $(e^x-\frac{3}{2}x^2+x)+(\cos x-1+\frac{1}{2}x^2)>1$. …………………………………………… 7 分

令 $\varphi(x)=\cos x-1+\frac{1}{2}x^2(x>0)$，则 $\varphi'(x)=x-\sin x>0$，则 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $\varphi(x)>\varphi(0)=0$，即 $\cos x-1+\frac{1}{2}x^2>0$. ……………………………………………… 9 分

令 $g(x)=e^x-\frac{3}{2}x^2+x$，则 $g'(x)=e^x-3x+1$， …………………………………………… 10 分

令 $h(x)=e^x-3x+1$，则 $h'(x)=e^x-3$，$h(x)$ 在 $(0,\ln 3)$ 上单调递减，在 $[\ln 3,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(x)_{\min}=4-3\ln 3>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)>g(0)=1$.
……………………………………………………………………………………………………… 11 分

故当 $a\geqslant1,x>0$ 时，$f(x)+\cos x>1$. …………………………………………………… 12 分

(法二)当 $a\geqslant1,x>0$ 时，要证 $f(x)+\cos x=a(e^x-1)-x^2+x+\cos x>1$，只需证 $e^x-1-x^2+x+\cos x>1$. ……………………………………………………………………………… 6 分

令 $F(x)=e^x-1-x^2+x+\cos x(x>0)$，则 $F'(x)=e^x-2x+1-\sin x$， ……………… 7 分

易知 $1-\sin x\geqslant0$，易证 $e^x-2x>0$，所以 $F'(x)>0$， ………………………………… 10 分

则 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $F(x)>F(0)=1$，从而 $f(x)+\cos x>1$. …… 12 分