

秘密★启用前

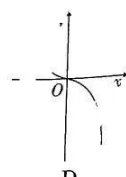
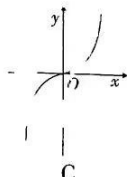
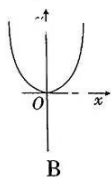
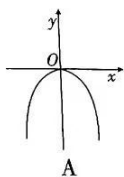
2023 届“3+3+3” 高考备考诊断性联考卷（二） 数 学

注意事项：

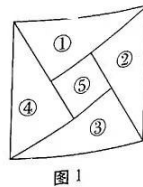
1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。在试题卷上作答无效。
3. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。满分 150 分，考试用时 120 分钟。

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 集合 $A = \{x \mid \log_2 x < 3\}$, $B = \{y \mid y = \sqrt{x(4-x)}\}$, 则 $A \cap B =$
 A. $\{x \mid 0 < x < 3\}$ B. $\{x \mid 0 \leq x < 3\}$ C. $\{x \mid 0 < x \leq 4\}$ D. $\{x \mid 0 < x \leq 2\}$
2. 已知复数 $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, 则 $|z^3| =$
 A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. 1 D. $\frac{\sqrt{7}}{2}$
3. 皮埃尔·德·费马（Pierre de Fermat）是十七世纪法国律师和业余数学家。费马曾提出猜想：对任意大于 2 的正整数 n , 关于 x, y, z 的方程 $x^n + y^n = z^n$ 没有正整数解。经历了三百多年，1995 年英国著名数学家、牛津大学教授安德鲁·怀尔斯（Andrew Wiles）给出了证明，使它成为费马大定理。若 $\triangle ABC$ 三边的长为 a, b, c 且都为正整数，满足 $a^n + b^n = c^n (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $\triangle ABC$ 一定是
 A. 锐角三角形 B. 直角三角形 C. 等腰三角形 D. 钝角三角形
4. 已知 $a = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{4}{5}}$, $b = \ln \pi$, $c = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$, 则
 A. $a < c < b$ B. $c < a < b$ C. $b < a < c$ D. $c < b < a$
5. 函数 $y = \ln(\cos x)$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 的图象大致形如



6. 三国时期数学家赵爽为了证明勾股定理，创制了一幅如图 1 所示的“弦图”，后人称之为“赵爽弦图”，它由四个全等的直角三角形和一个正方形构成。现对该图进行涂色，有 5 种不同的颜色提供选择，相邻区域所涂颜色不同。在所有的涂色方案中随机选择一种方案，该方案恰好只用到三种颜色的概率是
 A. $\frac{3}{20}$ B. $\frac{1}{7}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{5}$

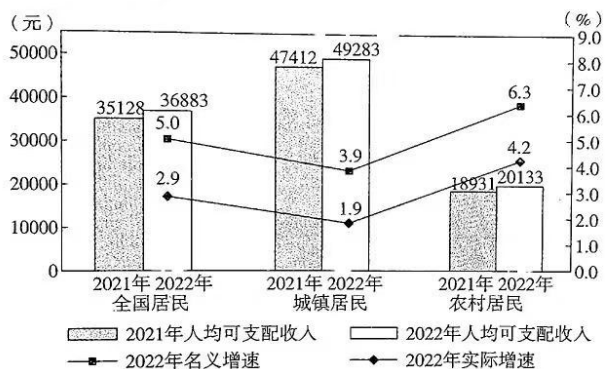


数学·第 1 页（共 4 页）

7. 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB=2$, $CD=1$, O 为 BD 的中点, $\vec{AB} \cdot \vec{AO}=3$, 则 $\angle ABC=$
 A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{2\pi}{3}$
8. 已知 $f(x)=3a^2+2ax\ln x$, $a \in \{-1, 1\}$, $g(x)=bx-x^2$, $b \in \{1, 2, 3, 4\}$, 使 $f(x)>g(x)$ 恒成立的有序数对 (a, b) 有
 A. 2 个 B. 4 个 C. 6 个 D. 8 个

二、多项选择题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项是符合题目要求的, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分)

9. 恩格尔系数是食品支出总额占个人消费支出总额的比重, 恩格尔系数达 59% 以上为贫困, 50~59% 为温饱, 40~50% 为小康, 30~40% 为富裕, 低于 30% 为最富裕. 国家统计局 2023 年 1 月 17 日发布了我国 2022 年居民收入和消费支出情况, 根据统计图表如图 2 甲、乙所示, 下列说法正确的是



图甲 2022年全国及分城乡居民人均可支配收入与增速



图乙 2022年居民人均消费支出及构成

- A. 2022 年城镇居民人均可支配收入增长额超过农村居民人均可支配收入增长额
 B. 2022 年城镇居民收入增长率快于农村居民
 C. 从恩格尔系数看, 可认为我国在 2022 年达到富裕
 D. 2022 年全国居民人均消费支出构成中食品烟酒和居住占比超过 50%
10. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$, F_1, F_2 为 C 的左、右焦点, P 为 C 上一点, 且 $PF_1 \perp F_1F_2$, 若 PF_2 交 C 点于点 Q , 则
 A. $\triangle PF_1Q$ 周长为 8 B. $\angle F_1PF_2 < \frac{\pi}{3}$ C. $\triangle QF_1F_2$ 面积为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D. $|F_1Q| = \frac{17}{5}$
11. 将函数 $y = \sin 2\omega x$ ($\omega > 0$) 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 得到函数 $f(x)$, 下列关于 $f(x)$ 的说法正确的是
 A. $f(x)$ 关于 $(-\frac{\pi}{6}, 0)$ 对称
 B. 当 $\omega = 1$ 时, $f(x)$ 关于 $x = -\frac{5\pi}{12}$ 对称
 C. 当 $0 < \omega \leq 1$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{12})$ 上单调递增
 D. 若 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ 上有三个零点, 则 ω 的取值范围为 $[1, \frac{3}{2}]$

12. 在正三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA=PB=PC=2$, D 为 PC 的中点, 以下四个结论中正确的是

- A. 若 $PC \perp$ 平面 ABD , 则二面角 $P-AB-C$ 余弦值为 $\frac{1}{3}$
 B. 若 $PC \perp$ 平面 ABD , 则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球体积为 $\sqrt{6}\pi$
 C. 若 $PA \perp BD$, 则三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
 D. 若 $PA \perp BD$, 则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球表面积为 12π

三、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 函数 $f(x) = e^x - \ln(1+x)$ 的单调递增区间为 _____.

14. 在 $(2x-1)^6 \left(x - \frac{1}{x}\right)$ 的展开式中, x^4 的系数为 _____. (结果填数字)

15. $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1} + \ln \frac{e-x}{e+x}$ ($-2 \leq x \leq 2$), 其最大值和最小值的和为 _____.

16. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , P 为右支上一点, 且 $|PF_1| = 3|PF_2|$, $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆圆心为 I , 与 F_1F_2 切于点 A , 直线 PI 交 x 轴于点 Q , 若 $\vec{F_1Q} = \frac{9}{4}\vec{AF_2}$, 则双曲线的离心率为 _____.

四、解答题 (共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $2a_n S_n = a_n^2 + 1$.

(1) 求证: 数列 $\{S_n^2\}$ 为等差数列, 并求出 S_n, a_n ;

(2) 若 $b_n = \frac{(-1)^n}{S_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 2023 项和 T_{2023} .

18. (本小题满分 12 分)

如图 3 甲, 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 6 的等边三角形, D, E 分别是 AB, AC 的点, 且 $AD=AE=2$, 将 $\triangle ADE$ 沿着 DE 翻折, 使点 A 到达点 P 处使得 $PB=2\sqrt{6}$, 得到四棱锥 $P-BCED$, 如图乙.

(1) 求证: 平面 $PDE \perp$ 平面 $BCED$;

(2) 求平面 PDB 与平面 PEC 所成锐二面角的正弦值.

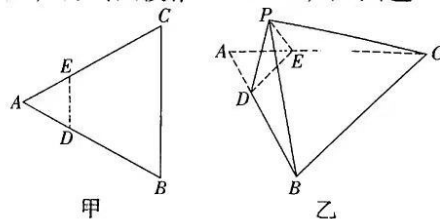


图 3

19. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ,

$$\text{已知: } \frac{\tan B - \tan C}{\tan B + \tan C} = \frac{a - c}{a}.$$

(1) 求 B ;

(2) 若 $\vec{AD} = 2\vec{DC}$, $BD=2$, 当 $2a+c$ 取最大值时, 求 $\triangle ABC$ 外接圆的半径.

20. (本小题满分 12 分)

《密室逃脱》是一款实景逃脱类游戏，参与者被困在房间内，需要根据提示寻找线索，在规定时间内依次打开每一扇房门则游戏完成，否则失败。一密室店主统计了 400 个顾客参与 A 主题密室逃脱的时间，得到顾客完成逃脱用时的频率分布直方图如图 4：

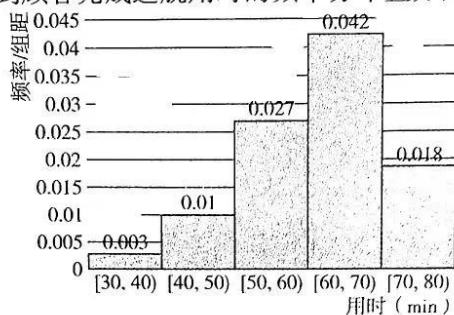


图 4

(1) 若顾客用时均值大于 60 分钟，且标准差小于 10 分钟，则认为该主题密室逃脱成功难度大。请判断 A 主题的成功难度；(参考数据：方差 $s^2 = 97.5$)

(2) 店主计划至少 80% 的顾客能在规定时间 m 分钟内完成逃脱，试计算 m ；(四舍五入保留到个...)

(3) 为吸引顾客，该店推出如下游戏规则：

① 在 (2) 的条件下，参加单人任务，在规定时间内 m 分钟内完成则奖励 1 元；

② 组团参与者可购买一份 10 元组团券，3 人同时进入 A 主题的不同房间，若 60 分钟内所有人完成逃脱，则每人可获 10 元奖励，2 人完成逃脱，则每人可获 7 元奖励，1 人完成逃脱，则每人可获 3 元奖励。用频率估计概率，若你是顾客，会选择哪种方案？

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 $F(-2, 0)$ ，直线 l 过点 F 交椭圆 Γ 于 A, B 两

点。当直线 l 垂直于 x 轴时， $\triangle OAB$ 的面积为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 。

(1) 求椭圆 Γ 的方程；

(2) 直线 $l_1: x = -3$ 上是否存在点 C ，使得 $\triangle ABC$ 为正三角形？若存在，求出点 C 的坐标及直线 l 的方程；若不存在，请说明理由。

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{x-1} - 1, & x \leq 1 \\ x - 1, & x > 1 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq 1 \\ \log_3 x, & x > 1 \end{cases}$ 。

(1) 求 $y = f(x)$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线方程；

(2) 若 $af(x) - g(x) \geq 0$ ，求实数 a 的取值范围。

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线