

内江市高中 2023 届第三次模拟考试题

数 学(文科)

1. 本试卷包括第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 4 页。全卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

2. 答第 I 卷时,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号;答第 II 卷时,用 0.5 毫米的黑色签字笔在答题卡规定的区域内作答,字体工整,笔迹清楚;不能答在试题卷上。

3. 考试结束后,监考员将答题卡收回。

第 I 卷(选择题,共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每个小题所给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把正确选项的代号填在答题卡的指定位置。

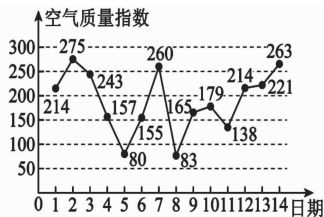
1. 已知复数 $2z - \bar{z} = 1 - 3i$, 其中 i 是虚数单位, $\bar{z}$ 是 z 的共轭复数, 则 $z =$

- A. $1 + i$ B. $1 - i$ C. $-1 + i$ D. $-1 - i$

2. 已知全集 $U = \mathbb{R}$, $M = \{x | x^2 - 4x + 3 \leq 0\}$, $N = \{x | 0 < x \leq 2\}$, 则 $\complement_U(M \cup N) =$

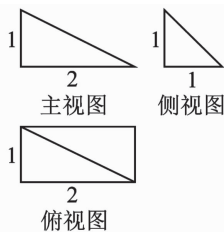
- A. $(-\infty, 0] \cup (3, +\infty)$ B. $(-\infty, 3)$ C. $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ D. $(3, +\infty)$

3. 空气质量指数是评估空气质量状况的一组数字,空气质量指数划分为 $[0, 50)$ 、 $[50, 100)$ 、 $[100, 150)$ 、 $[150, 200)$ 、 $[200, 300)$ 和 $[300, 500)$ 六档,分别对应“优”、“良”、“轻度污染”、“中度污染”、“重度污染”和“严重污染”六个等级。如图是某市 4 月 1 日至 14 日连续 14 天的空气质量指数趋势图,则下列说法中正确的是



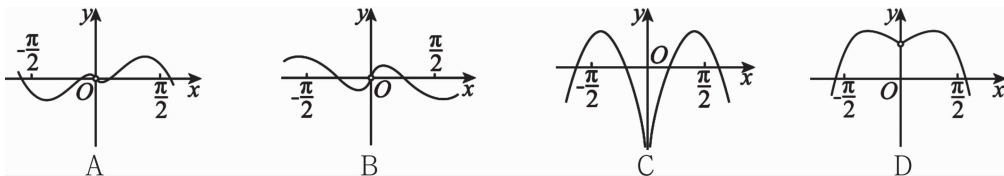
- A. 从 2 日到 5 日空气质量越来越差
B. 这 14 天中空气质量指数的中位数是 214
C. 连续三天中空气质量指数方差最小是 5 日到 7 日
D. 这 14 天中空气质量指数的平均数约为 189

4. 我国古代数学名著《九章算术》中几何模型“阳马”意指底面为矩形,一侧棱垂直于底面的四棱锥。某“阳马”的三视图如图所示,则该四棱锥中棱长的最大值为



- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{5}$
C. $\sqrt{6}$ D. 2

5. 函数 $f(x) = x \cos x + (\sin x) \ln |x|$ 的部分图像大致为



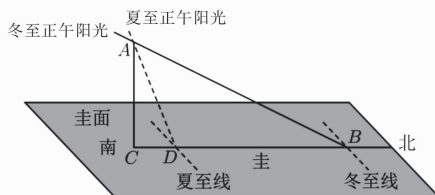
6. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{e^x} - a$ 和 $g(x) = \frac{\ln x}{x} + b$ 有相同的极大值, 则 $a + b =$

- A. 2 B. 0 C. -3 D. -1

7. 一个人连续射击 2 次, 则下列各事件关系中, 说法正确的是

- A. 事件“两次均击中”与事件“至少一次击中”互为对立事件
B. 事件“第一次击中”与事件“第二次击中”为互斥事件
C. 事件“两次均未击中”与事件“至多一次击中”互为对立事件
D. 事件“恰有一次击中”与事件“两次均击中”为互斥事件

8. 圭表是我国古代一种通过测量正午日影长度来推定节气的天文仪器, 它包括一根直立的标竿(称为“表”)和一把呈南北方向水平固定摆放的与标竿垂直的长尺(称为“圭”). 当正午太阳照射在表上时, 日影便会投影在圭面上, 圭面上日影长度最长的那一天定为冬至, 日影长度最短的那一天定为夏至. 如图是一个根据某地的地理位置设计的圭表的示意图, 已知该地冬至正午太阳高度角(即 $\angle ABC$)约为 32.5° , 夏至正午太阳高度角(即 $\angle ADC$)约为 79.5° , 圭面上冬至线与夏至线之间的距离(即 DB 的长)为 14 米, 则表高(即 AC 的长)约为(其中, $\tan 32.5^\circ \approx \frac{3}{5}$, $\tan 79.5^\circ \approx \frac{27}{5}$)



约为(其中, $\tan 32.5^\circ \approx \frac{3}{5}$, $\tan 79.5^\circ \approx \frac{27}{5}$)

- A. 9.27 米 B. 9.33 米 C. 9.45 米 D. 9.51 米

9. 已知圆锥的母线长为 2, 侧面积为 $2\sqrt{3}\pi$, 则过顶点的截面面积的最大值等于

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. 3

10. 阿基米德在他的著作《关于圆锥体和球体》中计算了一个椭圆的面积. 当我们垂直地缩小一个圆时, 我们得到一个椭圆, 椭圆的面积等于圆周率 π 与椭圆的长半轴长与短半轴长的乘积, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的面积为 $6\sqrt{2}\pi$, 点 P 为椭圆 C 的上顶点, 直线 $y = kx$ 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 若 PA, PB 的斜率之积为 $-\frac{8}{9}$, 则椭圆 C 的长轴长为

$= kx$ 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 若 PA, PB 的斜率之积为 $-\frac{8}{9}$, 则椭圆 C 的长轴长为

- A. 3 B. 6 C. $2\sqrt{2}$ D. $4\sqrt{2}$

11. 若函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{5}) (\omega > 0)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 上是单调函数, 则 ω 的取值可以是

- A. 2 B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{2}{5}$

12. 若关于 x 的不等式 $\ln x + a - \frac{3a-1}{x} < 0$ 有且只有一个整数解, 则正实数 a 的取值范围是

- A. $(\frac{1}{2}, 2\ln 2 + 1]$ B. $(\frac{1}{2}, 3\ln 3 + 1]$
C. $(2\ln 2 + 1, 3\ln 3 + 1]$ D. $[\ln 2 + \frac{1}{2}, 3\ln 3 + 1)$

第 II 卷(非选择题,共 90 分)

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知 $|\vec{a}| = 4$, 且 $\vec{a} \perp (\vec{a} + 2\vec{b})$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ _____.

14. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y \geq 0, \\ x - y + 1 \geq 0, \\ 2x + y - 4 \leq 0, \end{cases}$ 则 $z = \log_2(x + y - 1)$ 的最大值为_____.

15. 设 F_1, F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, O 为坐标原点, 过左焦点 F_1 作直线 F_1P 与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 切于点 E , 与双曲线右支交于点 P , 且满足 $\vec{OE} = \frac{1}{2}(\vec{OP} + \vec{OF_1})$, $|\vec{OE}| = \sqrt{2}$, 则双曲线的方程为_____.

16. 甲、乙两人下围棋, 若甲执黑子先下, 则甲胜的概率为 $\frac{2}{3}$; 若乙执黑子先下, 则乙胜的概率为 $\frac{1}{2}$. 假定每局之间相互独立且无平局, 第二局由上一局负者先下, 若甲、乙比赛两局, 第一局甲、乙执黑子先下是等可能的, 则甲胜第一局, 乙胜第二局的概率为_____.

三、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_1 = 2, S_{n+1} = 2S_n + 2$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 记 $b_n = \frac{na_n}{(n+1)(n+2)}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (本小题满分 12 分)

某厂商调查甲、乙两种不同型号电视机在 8 个卖场的销售量(单位:台), 并根据这 8 个卖场的销售情况, 得到如图所示的茎叶图. 为了鼓励卖场, 在同型号电视机的销售中, 该厂商将销售量高于数据平均数的卖场命名为该型号电视机的“星级卖场”.

甲		乙
4 8 0 0	1	0
7 5 2	2	0 2 3
4	3	1 2 a b

(1) 当 $a = 1, b = 1$ 时, 记甲型号电视机的“星级卖场”数量为 m , 乙型号电视机的“星级卖场”数量为 n , 比较 m, n 的大小关系;

(2) 在这 8 个卖场中, 随机选取 2 个卖场, 求这两个卖场都是甲型号电视机的“星级卖场”的概率;

(3) 记乙型号电视机销售量的方差为 S^2 , 根据茎叶图推断 a 与 b 分别取何值时, S^2 达到最小值. (只需写出结论)

19. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 45^\circ, BC = 3$, 过点 A 作 $AD \perp BC$, 交线段 BC 于点 D (如图 1), 沿 AD 将 $\triangle ABD$ 折起, 使 $\angle BDC = 90^\circ$ (如图 2), 点 E, M 分别为棱 BC, AC 的中点.

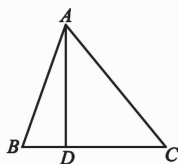


图1

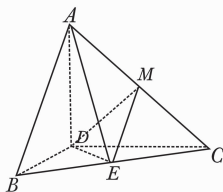


图2

(1) 求证: $CD \perp ME$;

(2) 在图 2 中, 当三棱锥 $A-BCD$ 的体积取最大值时, 求三棱锥 $A-MDE$ 的体积.

20. (本小题满分 12 分)

若存在实数 k, b , 使得函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 对其定义域上的任意实数 x 同时满足: $f(x) \geq kx + b$ 且 $g(x) \leq kx + b$, 则称直线: $l: y = kx + b$ 为函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的“隔离直线”. 已知 $f(x) = x^2, g(x) = 2e \ln x$ (其中 e 为自然对数的底数). 试问:

(1) 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象是否存在公共点, 若存在, 求出公共点坐标, 若不存在, 说明理由;

(2) 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否存在“隔离直线”? 若存在, 求出此“隔离直线”的方程; 若不存在, 请说明理由.

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 2, 一条连接椭圆的两个顶点的直线斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过椭圆 C 右焦点 F 且不与 x 轴重合的直线与椭圆 C 相交于 A, B 两点, 试问 x 轴上是否存在点 P , 使得直线 AP, PB 斜率之积恒为定值? 若存在, 求出该定值及点 P 的坐标; 若不存在, 说明理由.

请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 并用 2B 铅笔将所选题号涂黑. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分)

在平面直角坐标系中, 将曲线 C_1 向左平移 2 个单位, 再将得到的曲线上的每一个点的横坐标保持不变, 纵坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ 得到曲线 C_2 , 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系. 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho = 4 \cos \alpha$.

(1) 求曲线 C_2 的参数方程;

(2) 已知点 M 在第一象限, 四边形 $MNPQ$ 是曲线 C_2 的内接矩形, 求内接矩形 $MNPQ$ 周长的最大值, 并求周长最大时点 M 的坐标.

23. (本小题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = |2x - 4| + |x^2 + a| (x \in \mathbb{R})$.

(1) 若 $a = 1$, 求证: $f(x) \geq 4$;

(2) 若对于任意 $x \in [1, 2]$, 都有 $f(x) \leq 4$, 求实数 a 的取值范围.

内江市高中 2023 届第三次模拟考试题

数学(文科)参考答案及评分意见

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.)

1. B 2. A 3. D 4. C 5. A 6. B 7. D 8. C 9. C 10. B 11. D 12. A

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,满分 20 分.)

13. -8 14. 1 15. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 1$ 16. $\frac{7}{24}$

三、解答题(共 70 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤,第 17~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答,第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答.)

17. 解:(1)当 $n=1$ 时,由 $S_{n+1}=2S_n+2$ 得: $S_2=2S_1+2$,即 $a_1+a_2=2a_1+2$,

又 $a_1=2$, $\therefore a_2=4$; 1 分

当 $n \geq 2$ 时, $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=2S_n+2-2S_{n-1}-2=2a_n$, 3 分

又 $a_1=2, a_2=4$ 满足 $a_2=2a_1$,即当 $n=1$ 时, $a_{n+1}=2a_n$ 成立, 4 分

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项,2 为公比的等比数列, $\therefore a_n=2^n (n \in N^*)$ 6 分

(2)由(1)得: $b_n = \frac{n \cdot 2^n}{(n+1)(n+2)} = \frac{2^{n+1}}{n+2} - \frac{2^n}{n+1}$, 9 分

$\therefore T_n = \frac{2^2}{3} - \frac{2^1}{2} + \frac{2^3}{4} - \frac{2^2}{3} + \frac{2^4}{5} - \frac{2^3}{4} + \cdots + \frac{2^n}{n+1} - \frac{2^{n-1}}{n} + \frac{2^{n+1}}{n+2} - \frac{2^n}{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+2} - 1$ 12 分

18. 解:(1)根据茎叶图可知甲组数据的平均数为

$\frac{10+10+14+18+22+25+27+34}{8} = 20$, 1 分

乙组数据的平均数为 $\frac{10+20+22+23+31+32+31+31}{8} = 25$, 2 分

甲型号电视机的“星级卖场”数量为 $m=4$,乙型号电视机的“星级卖场”数量为 $n=4$

所以 $m=n$; 4 分

(2)由(1)知,甲型号电视机的“星级卖场”数量为 4,设选取的两个卖场都是甲型电视机的“星级卖场”设为事件 M ,设甲型号电视机的“星级卖场”分别为 a, b, c, d ,甲型号电视机的非“星级卖场”分别为 A, B, C, D ,从这 8 个卖场中,随机选取 2 个卖场,有 $AB, AC, AD, Aa, Ab, Ac, Ad, BC, BD, Ba, Bb, Bc, Bd, CD, Ca, Cb, Cc, Cd, Da, Db, Dc, Dd, ab, ac, ad, bc, bd, cd$,共计 28 个

..... 6 分

其中满足条件为 ab, ac, ad, bc, bd, cd ,共计 6 个 8 分

所以, $P(M) = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$ 10 分

(3) $a=b=0$ 当时, s^2 达到最小值. 12 分

19. 解:(1)证明: $\because CD \perp AD, CD \perp BD, AD \cap BD = D, AD, BD \subset$ 平面 ABD ,

$\therefore CD \perp$ 平面 $ABD, \because AB \subset$ 平面 $ABD, \therefore CD \perp AB$ 2 分

又 $\because M, E$ 分别为 AC, BC 的中点,

$\therefore ME \parallel AB$, 4 分

$\therefore CD \perp ME$ 5 分

(2)图 1 所示的 $\triangle ABC$ 中,设 $BD=x(0 < x < 3)$,则 $CD=3-x$,

$\because AD \perp BC, \angle ACB = 45^\circ, \therefore \triangle ADC$ 为等腰直角三角形, $\therefore AD = CD = 3 - x$.

折起后 $AD \perp DC, AD \perp BD$, 且 $BD \cap DC = D, BD, DC \subset$ 平面 BCD ,

$\therefore AD \perp$ 平面 BCD , 7 分

又 $\angle BDC = 90^\circ, \therefore S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}x(3-x)$,

$V_{A-BCD} = \frac{1}{3}AD \cdot S_{\triangle BCD} = \frac{1}{3}(3-x) \cdot \frac{1}{2}x(3-x) = \frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 9x), x \in (0, 3)$, 8 分

令 $f(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 9x), f'(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-3)$,

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $1 < x < 3$ 时, $f'(x) < 0$,

$\therefore x = BD = 1$ 时, 三棱锥 $A-BCD$ 的体积最大 9 分

又易知 $BD \perp$ 平面 ACD , 因为 E 为线段 BC 的中点, 所以 E 到平面 ACD 的距离为 $\frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}$ 10 分

又 $V_{A-MDE} = V_{E-ADM} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}S_{\triangle ADM} = \frac{1}{6}$,

故三棱锥 $A-MDE$ 的体积为 $\frac{1}{6}$ 12 分

20. 解: (1) 设 $F(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 2e \ln x (x > 0)$, 1 分

$\therefore F'(x) = 2x - \frac{2e}{x} = \frac{2(x - \sqrt{e})(x + \sqrt{e})}{x}$, 令 $F'(x) = 0$, 得 $x = \sqrt{e}$, 2 分

当 $0 < x < \sqrt{e}$ 时, $F'(x) < 0$, $x > \sqrt{e}$ 时, $F'(x) > 0$,

故当 $x = \sqrt{e}$ 时, $F(x)$ 取到最小值, 最小值是 0, 4 分

从而函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象在 $x = \sqrt{e}$ 处有公共点, 其坐标为 $(\sqrt{e}, e)$ 5 分

(2) 由 (1) 可知, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象在 $x = \sqrt{e}$ 处有公共点,

如果存在 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的隔离直线, 那么该直线过这个公共点, 6 分

设隔离直线方程为 $y - e = k(x - \sqrt{e})$, 即 $y = kx - k\sqrt{e} + e$,

由 $f(x) \geq kx - k\sqrt{e} + e (x \in R)$, 可得 $x^2 - kx + k\sqrt{e} - e \geq 0$ 在 $x \in R$ 上恒成立,

则 $\Delta = k^2 - 4k\sqrt{e} + 4e = (k - 2\sqrt{e})^2 \leq 0$, 只有 $k = 2\sqrt{e}$, 8 分

此时直线方程为: $y = 2\sqrt{e}x - e$ 9 分

下面证明 $g(x) \leq 2\sqrt{e}x - e$ 恒成立,

令 $G(x) = 2\sqrt{e}x - e - g(x) = 2\sqrt{e}x - e - 2e \ln x$,

$G'(x) = 2\sqrt{e} - \frac{2e}{x} = \frac{2\sqrt{e}x - 2e}{x} = \frac{2\sqrt{e}(x - \sqrt{e})}{x}$, 当 $x = \sqrt{e}$ 时, $G'(x) = 0$,

当 $0 < x < \sqrt{e}$ 时 $G'(x) < 0$, 函数单调递减; $x > \sqrt{e}$ 时, $G'(x) > 0$, 函数单调递增,

则当 $x = \sqrt{e}$ 时, $G(x)$ 取到最小值是 0, 11 分

所以 $G(x) = 2\sqrt{e}x - e - g(x) \geq 0$, 则 $g(x) \leq 2\sqrt{e}x - e$ 当 $x > 0$ 时恒成立.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 存在唯一的隔离直线 $y = 2\sqrt{e}x - e$ 12 分

$$21. \text{解: (1) 由题意易知: } \begin{cases} 2c=2 \\ \frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a=2 \\ b=\sqrt{3} \\ c=1 \end{cases}, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的方程为: } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 由(1)知椭圆 C 右焦点 F 坐标为 $(1,0)$, 设直线 $AB: x = my + 1, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), P(n, 0)$,

$$\text{由 } \begin{cases} x = my + 1 \\ 3x^2 + 4y^2 - 12 = 0 \end{cases} \text{ 得, } (3m^2 + 4)y^2 + 6my - 9 = 0$$

$$\text{显然 } \Delta > 0, \text{ 且 } \begin{cases} y_1 + y_2 = -\frac{6m}{3m^2 + 4} \\ y_1 y_2 = -\frac{9}{3m^2 + 4} \end{cases} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \text{此时 } k_{PA} k_{PB} &= \frac{y_1}{x_1 - n} \cdot \frac{y_2}{x_2 - n} = \frac{y_1 y_2}{(my_1 + 1 - n)(my_2 + 1 - n)} = \frac{y_1 y_2}{m^2 y_1 y_2 + (1 - n)m(y_1 + y_2) + (1 - n)^2} \\ &= \frac{-\frac{9}{3m^2 + 4}}{-\frac{9m^2}{3m^2 + 4} - (1 - n)m \frac{6m}{3m^2 + 4} + (1 - n)^2} = \frac{9}{9m^2 + 6m^2(1 - n) - (1 - n)^2(3m^2 + 4)} \\ &= \frac{9}{3m^2(4 - n)^2 - 4(1 - n)^2} \dots\dots\dots 9 \text{ 分} \end{aligned}$$

由上式知: 无论 m 取何值, 当 $n^2 = 4$, 即 $n = \pm 2$ 时, $k_{PA} k_{PB}$ 是一个与 m 无关的定值,

$$\text{当 } n = -2 \text{ 时, } k_{PA} k_{PB} = \frac{9}{-4 \times 3^2} = -\frac{1}{4}; \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{当 } n = 2 \text{ 时, } k_{PA} k_{PB} = \frac{9}{-4 \times 1} = -\frac{9}{4} \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

综上所述, 存在定点 P 满足题意. 当定点为 $P(-2, 0)$ 时, 直线 AP, PB 斜率之积为 $-\frac{1}{4}$;

$$\text{当定点为 } P(2, 0) \text{ 时, 直线 } AP, PB \text{ 斜率之积为 } = -\frac{9}{4} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$22. \text{解: (1) 由 } \rho = 4\cos\alpha \text{ 得 } \rho^2 = 4\rho\cos\alpha, \text{ 将 } \begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 \\ \rho\cos\alpha = x \end{cases} \text{ 代入整理得,}$$

$$\text{曲线 } C_1 \text{ 的普通方程为 } (x - 2)^2 + y^2 = 4, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{设曲线 } C_1 \text{ 上的点为 } (x', y'), \text{ 变换后的点为 } (x, y), \text{ 由题可知坐标变换为 } \begin{cases} x = x' - 2 \\ y = \frac{1}{2}y' \end{cases},$$

$$\text{即 } \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = 2y \end{cases}, \text{ 代入曲线 } C_1 \text{ 的普通方程, 整理得曲线 } C_2 \text{ 的普通方程 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

∴ 曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数). 5 分

(2) 设四边形 $MNPQ$ 的周长为 l , 设点 $M(2\cos\theta, \sin\theta)$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$), 6 分

$$l = 8\cos\theta + 4\sin\theta = 4\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{5}}\sin\theta\right) = 4\sqrt{5}\sin(\theta + \varphi), \text{ 且 } \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ 7 分}$$

$$\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \therefore \varphi < \theta < \frac{\pi}{2} + \varphi, \therefore \sin(\theta + \varphi) \leq 1,$$

$$\therefore l_{\max} = 4\sqrt{5}. \text{ 且当 } \theta + \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } l \text{ 取最大值, 此时 } \theta = \frac{\pi}{2} - \varphi, \text{ 8 分}$$

$$\text{所以, } 2\cos\theta = 2\sin\varphi = \frac{4}{\sqrt{5}}, \sin\theta = \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}, \text{ 此时 } M\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \text{ 10 分}$$

23 解: 当 $a = 1$ 时, $f(x) = |2x - 4| + |x^2 + 1|$

$$\text{当 } x \geq 2 \text{ 时, } f(x) = x^2 + 2x - 3 \geq f(2) = 5, \text{ 2 分}$$

$$\text{当 } x < 2 \text{ 时, } f(x) = x^2 - 2x + 5 \geq f(1) = 4,$$

$$\text{所以 } f(x) \geq 4. \text{ 4 分}$$

$$(2) \text{ 当 } x \in [1, 2] \text{ 时, } f(x) = 4 - 2x + |x^2 + a|,$$

$$\text{由 } f(x) \leq 4, \text{ 得 } -x^2 - 2x \leq a \leq -x^2 + 2x, \text{ 6 分}$$

$$\text{设 } h(x) = -x^2 - 2x, g(x) = -x^2 + 2x,$$

$$\text{对任意 } x \in [1, 2], f(x) \leq 4 \text{ 恒成立, 所以 } h_{\max}(x) \leq a \leq g_{\min}(x), \text{ 8 分}$$

$$\text{因为在区间 } [1, 2] \text{ 上, } h_{\max}(x) = h(1) = -3, g_{\min}(x) = g(2) = 0,$$

$$\text{所以 } -3 \leq a \leq 0. \text{ 即实数 } a \text{ 的取值范围为 } [-3, 0] \text{ 10 分}$$