

哈师大附中 2021 级高二学年下学期期末考试数学试卷

120 分钟 满分 150 分

一、选择题：本大题单项选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设全集 $U = \{0, 1, 2, 4, 6, 8\}$ ，集合 $M = \{0, 4, 6\}$ ， $N = \{0, 1, 6\}$ ，则 $M \cup C_U N =$ ()
A. $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ B. $\{0, 1, 4, 6, 8\}$ C. $\{1, 2, 4, 6, 8\}$ D. U
 2. 对两组呈线性相关的变量进行回归分析，得到不同的两组样本数据，第一组和第二组对应的线性相关系数分别为 r_1, r_2 ，则 $r_1 > r_2$ 是第一组变量比第二组变量线性相关程度强的 () 条件。
A. 充分不必要 B. 必要不充分 C. 充要 D. 既不充分也不必要
 3. 将 5 名学生分配到 A, B, C, D, E 这 5 个社区参加义务劳动，每个社区分配 1 名学生，且学生甲不能分配到 A 社区，则不同的分配方法种数是 ()
A. 72 B. 96 C. 108 D. 120
 4. 如果 $a < b < 0$ ，那么下列不等式成立的是 ()
A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ B. $ab < b^2$ C. $a^2 < b^2$ D. $-ab < a^2$
 5. 如图，5 个 (x, y) 数据，去掉 $D(3, 10)$ 后，下列说法正确的是 ()
A. 样本相关系数 r 变小
B. 残差平方和变大
C. 决定系数 R^2 变大
D. 解释变量 x 与响应变量 y 的相关性变弱
-
6. 现从 4 名男医生和 3 名女医生中抽取两人加入“援鄂医疗队”，用 A 表示事件“抽到的两名医生性别相同”， B 表示事件“抽到的两名医生都是男医生”，则 $P(B|A) =$ ()
A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{4}{7}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$
 7. 下列说法错误的是 ()
A. 对两个变量 x, y 进行线性相关检验，得线性相关系数 $r_1 = 0.8995$ ，对两个变量 u, v 进行线性相关检验，得线性相关系数 $r_2 = -0.9568$ ，则变量 x 与 y 正相关，变量 u 与 v 负相关，变量 u 与 v 的线性相关性较强
B. 若随机变量 Y 服从两点分布，且 $E(Y) = \frac{1}{2}$ ，则 $D(2Y) = 1$

C. 以模型 $y = ce^{kx}$ 去拟合一组数据时，为了求出回归方程，设 $z = \ln y$ ，将其变换后得到线性方程 $z = 0.5x + 1$ ，则 c, k 的值分别是 $e, 0.5$

- D. 回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 恒过点 (\bar{x}, \bar{y}) ，且至少过一个样本点
8. 已知 $f(x) = x^2 - 2x + m, g(x) = e^{2x-1} - 1$ ，若 $\forall x_1 \in [0, 3], \exists x_2 \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ ，使得 $f(x_1) = g(x_2)$ ，则实数 m 的取值范围是 ()
A. $[2, e^2 - 4]$ B. $[1, e^2 - 5]$ C. $[2, e^2 - 5]$ D. $[1, e^2 - 4]$
 - (多选题) 本题为多项选择，共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全答对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。
 9. (多选题) 已知 x, y 是正数，且 $x + y = 2$ ，下列叙述正确的是 ()
A. xy 最大值为 1 B. $2^x + 2^y$ 有最大值 4
C. $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ 的最大值为 2 D. $\frac{1}{x} + \frac{4}{y}$ 的最小值为 9
 10. (多选题) 对于离散型随机变量 X ，它的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$ ，下列说法正确的是 ()
A. $E(X)$ 是反映随机变量的平均取值 B. $D(X)$ 越小，说明 X 越集中于 $E(X)$
C. $E(aX + b) = aE(X) + b$ D. $D(aX + b) = a^2D(X) + b$

11. (多选题) 下列命题中，正确的命题是 ()
A. 已知随机变量服从二项分布 $B(n, p)$ ，若 $E(x) = 30, D(x) = 20$ ，则 $p = \frac{2}{3}$
B. 已知 $A_n^3 = C_n^4$ ，则 $n = 27$
C. 设随机变量 ξ 服从正态分布 $N(0, 1)$ ，若 $P(\xi > 1) = p$ ，则 $P(-1 < \xi < 0) = \frac{1}{2} - p$
D. 某人在 10 次射击中，击中目标的次数为 $X, X \sim B(10, 0.85)$ ，则当 $X = 9$ 时概率最大
12. (多选题) 一盒中有 7 个乒乓球，其中 5 个未使用过，2 个已使用过，第一次从盒子中任取 3 个球来用，用完后再装回盒中，记此时盒子中已使用过的球的个数为 X ，第二次从盒子中任取 2 个球，设其中新球的个数为随机变量 Y ，则 ()
A. X 的所有可能取值是 3, 4, 5 B. $E(X) = \frac{34}{7}$ C. $P(Y=2|X=5) = \frac{1}{21}$ D. $P(Y=2) = \frac{20}{147}$

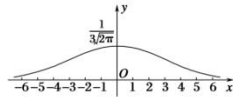


二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 命题“ $\exists x < 0, x^2 + 2x - 1 > 0$ ”的否定是_____。

14. 设随机变量 X 的概率分布列如下表，则 $P(|X-3|=1) =$ _____。

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{3}$	m	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$



15. 已知某批零件的长度误差 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，其密度函数 $\phi_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ 的曲线如上图所示，则 $\sigma =$ _____；从中随机取一件，其长度误差落在 $[-6, -3]$ 内的概率约为_____。
(附：若随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P(\mu - \sigma \leq \xi \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$ ， $P(\mu - 2\sigma \leq \xi \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$ ， $P(\mu - 3\sigma \leq \xi \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$)

16. 定义：在等式 $(x^2 + x - 2)^n = D_0^n x^{2n} + D_1^n x^{2n-1} + D_2^n x^{2n-2} + \dots + D_{n-1}^n x + D_n^n$ ($n \in N_+$) 中，把 $D_0^n, D_1^n, D_2^n, \dots, D_n^n$ 叫做三项式 $(x^2 + x - 2)^n$ 的 n 次系数列 (如三项式的 1 次系数列是 1, 1, -2)。则 (1) 三项式 $(x^2 + x - 2)^n$ 的 2 次系数列各项之和等于_____；(2) $D_4^3 =$ _____。

三、解答题：本大题共6小题，共70分 (17题10分，18至22题每题12分)。解答题写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

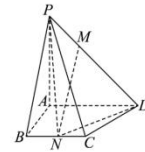
17. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = n$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 已知 $c_n = \begin{cases} \frac{1}{22a_n}, n = 2k - 1 \\ 2a_n \cdot a_{n+2}, n = 2k \end{cases}$, $k \in N^*$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 20 项和。

18. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形，其中 $AD \parallel BC$, $AB \perp AD$, $AD=3$, $AB=BC=2$, $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，且 $PA=3$ 。点 M 在棱 PD 上，点 N 为 BC 中点。

- (1) 证明：若 $DM=2MP$ ，则直线 $MN \parallel$ 平面 PAB ；
(2) 求平面 CPD 与平面 NPD 所成角的正弦值。



19. “每天锻炼一小时，健康生活五十年，幸福生活一辈子。”一科研单位为了解员工爱好运动是否与性别有关，从单位随机抽取 30 名员工进行了问卷调查，得到了如下列联表：

	男性	女性	合计
爱好	10		
不爱好		8	
合计			30

已知在这 30 人中随机抽取 1 人抽到爱好运动的员工的概率是 $\frac{8}{15}$ 。
参考公式： $\chi^2 = \frac{n(a-d-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, $n = a + b + c + d$ 。

附表：

α	0.100	0.050	0.010	0.005	0.001
χ_{α}^2	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

- (1) 请将上面的列联表补充完整，根据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验，分析爱好运动与否与性别是否有关？
(2) 若从这 30 人中的女性员工中随机抽取 2 人参加一活动，记爱好运动的人数为 X ，求 X 的分布列、数学期望。



20. 已知椭圆C的中心在原点, 焦点在x轴上, 长轴长为4, 且点 $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 在椭圆C上.

(1) 求椭圆C的方程;

(2) 设P是椭圆C长轴上的一个动点, 过P作方向向量 $\vec{d} = (2, 1)$ 的直线l交椭圆C于A、B两点, 求证: $|PA|^2 + |PB|^2$ 为定值.

21. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减, 求实数a的取值范围;

(2) 若 $a > 2$ 时, $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 证明: $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$.

22. 习近平总书记在党的十九大报告中指出, 要在“幼有所育、学有所教、劳有所得、病有所医、老有所养、住有所居、弱有所扶”上不断取得新进展, 保证全体人民在共建共享发展中有更多获得感. 现S市政府针对全市10所由市政财政投资建设的敬老院进行了满意度测评, 得到数据如下表:

敬老院	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K
满意度x(%)	20	34	25	19	26	20	19	24	19	13
投资原y(万元)	80	89	89	78	75	71	65	62	60	52

(1) 求投资额y关于满意度x的相关系数;

(2) 我们约定: 投资额y关于满意度x的相关系数r的绝对值在0.75以上(含0.75)是线性相关性较强, 否则, 线性相关性较弱. 如果没有达到较强线性相关, 则采取“末位淘汰”制(即满意度最低的敬老院市政不再继续投资, 改为区财政投资). 求在剔除“末位淘汰”的敬老院后投资额y关于满意度x的线性回归方程(系数精确到0.1)

参考数据: $\bar{x} = 21.9, \bar{y} = 72.1, \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 10\bar{x}^2 = 288.9, \sqrt{\sum_{i=1}^{10} y_i^2 - 10\bar{y}^2} \approx 37.16,$

$\sum_{i=1}^{10} x_i y_i - 10\bar{x} \cdot \bar{y} = 452.1, \sqrt{288.9} \approx 17.$

附: 对于一组数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, 其回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 的斜率和截距的最小二乘估计

公式分别为: $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$. 线性相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2)(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2)}}$

关于我们



自主选拔在线
微信号: zizzsw

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站(网址: www.zizzs.com)和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注**自主选拔在线**官方微信号: **zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线

