

## 厦门一中海沧校区 2024 届高三数学 9 月月考卷

2023.9.1

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

- 已知集合  $M = \{x | x^2 - x - 2 \leq 0\}$ ,  $N = \{x | y = \sqrt{x+2} + \sqrt{1-x}\}$ , 则  $M \cup N =$  ( )  
 A.  $[-2, 2]$                       B.  $[-1, 1]$                       C.  $[-2, 1]$                       D.  $[-1, 2]$
- 已知复数  $z$  满足  $(1-i)z = 1+i$ , 则  $z =$  ( )  
 A.  $-i$                                   B.  $i$                                   C.  $1-i$                               D.  $1+i$
- 从长度为 2, 4, 6, 8, 10 的 5 条线段中任取 3 条, 则这 3 条线段能构成一个三角形的概率是 ( )  
 A.  $\frac{3}{10}$                                   B.  $\frac{3}{5}$                                   C.  $\frac{3}{8}$                                   D.  $\frac{1}{3}$
- 已知关于  $x$  的不等式  $ax^2 + bx + 1 > 0$  的解集为  $(-\infty, m) \cup (\frac{1}{m}, +\infty)$ , 其中  $m < 0$ , 则  $\frac{b}{a} + \frac{2}{b}$  的最小值为 ( )  
 A.  $-2$                                   B.  $2$                                   C.  $2\sqrt{2}$                               D.  $3$
- 已知把物体放在空气中冷却时, 若物体原来的温度是  $\theta_1^\circ\text{C}$ , 空气的温度是  $\theta_0^\circ\text{C}$ , 则  $t\text{min}$  后物体的温度  $\theta^\circ\text{C}$  满足公式  $\theta = \theta_0 + (\theta_1 - \theta_0)e^{-kt}$  (其中  $k$  是一个随着物体与空气的接触状况而定的正常数). 某天小明同学将温度是  $80^\circ\text{C}$  的牛奶放在  $20^\circ\text{C}$  空气中, 冷却  $2\text{min}$  后牛奶的温度是  $50^\circ\text{C}$ , 则下列说法正确的是 ( )  
 A.  $k = \ln 2$   
 B.  $k = 2\ln 2$   
 C. 牛奶的温度降至  $35^\circ\text{C}$  还需  $4\text{min}$   
 D. 牛奶的温度降至  $35^\circ\text{C}$  还需  $2\text{min}$
- 已知函数  $f(x) = x^3 - ax^2 - bx + a^2$ , 则 “ $a + b = 7$ ” 是 “函数  $f(x)$  在  $x=1$  处有极值 10” 的 ( )  
 A. 充分不必要条件                  B. 必要不充分条件                  C. 充要条件                          D. 既不充分又不必要条件
- 已知  $F_1, F_2$  分别是椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左, 右焦点,  $M, N$  是椭圆  $C$  上两点, 且  $\overrightarrow{MF_1} = 2\overrightarrow{F_1N}$ ,  $\overrightarrow{MF_2} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$ , 则椭圆  $C$  的离心率为 ( )  
 A.  $\frac{3}{4}$                                   B.  $\frac{2}{3}$                                   C.  $\frac{\sqrt{5}}{3}$                                   D.  $\frac{\sqrt{7}}{4}$

8. 记  $a = \sqrt[2023]{2022}$ ,  $b = \sqrt[2023]{2023}$ ,  $c = \sqrt[2024]{2023}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系是 ( )

- A.  $a > b > c$                       B.  $a > c > b$                       C.  $b > c > a$                       D.  $b > a > c$

二、多选题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知一组样本数据  $x_1, x_2, \dots, x_n (n \geq 4)$  均为正数, 且  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ , 若由

$y_k = 2x_k - 1 (k = 1, 2, \dots, n)$  生成一组新的数据  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , 则这组新数据与原数据的 ( ) 可能相等

- A. 极差                                  B. 平均数                                  C. 中位数                                  D. 标准差

10. 将函数  $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{8}$  个单位长度得到  $y = g(x)$  的图象, 则 ( )

- A.  $y = f(x)$  在  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$  上是减函数                                  B.  $f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = f\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$

- C.  $y = g(x)$  是奇函数                                  D.  $y = g(x) - 1$  在  $[-\pi, \pi]$  上有 4 个零点

11. 已知函数  $y = f(x) (x \in \mathbf{R})$  的图象是连续不间断的, 函数  $y = f(x-1)$  的图象关于点  $(1, 1)$  对称, 在区

间  $(1, +\infty)$  上单调递增. 若  $f(m\cos\theta + 4\cos\theta - 2) + f(-4\cos 2\theta) > 2$  对任意  $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$  恒成立, 则下列选

项中  $m$  的可能取值有 ( )

- A.  $2\sqrt{2} - 4$                                   B.  $2 - 2\sqrt{2}$                                   C.  $\sqrt{2} - 2$                                   D.  $\sqrt{2} - 4$

12. 已知正四面体  $P-ABC$  的棱长为 2, 下列说法正确的是 ( )

A. 正四面体  $P-ABC$  的外接球表面积为  $6\pi$

B. 正四面体  $P-ABC$  内任意一点到四个面的距离之和为定值

C. 正四面体  $P-ABC$  的相邻两个面所成二面角的正弦值为  $\frac{1}{3}$

D. 正四面体  $Q-MNG$  在正四面体  $P-ABC$  的内部, 且可以任意转动, 则正四面体  $Q-MNG$  的体积最大

值为  $\frac{2\sqrt{2}}{81}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13.  $(x-2y)^5$  的展开式中  $x^2y^3$  的系数为\_\_.

14. 已知函数  $f(x) = \lg(|x|+1) + 2^x + 2^{-x}$ , 则使不等式  $f(x+1) < f(2x)$  成立的  $x$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.
15. 若定义域为  $\mathbb{R}$  的奇函数  $f(x)$  满足  $f(x) = f(x+1) + f(x-1)$ , 且  $f(1) = 2$ , 则  $f(2024) =$  \_\_\_\_\_.
16. 已知  $e_{O_1}: x^2 + (y-2)^2 = 1$ ,  $e_{O_2}: (x-3)^2 + (y-6)^2 = 9$ , 过  $x$  轴上一点  $P$  分别作两圆的切线, 切点分别是  $M, N$ , 当  $|PM| + |PN|$  取到最小值时, 点  $P$  坐标为 \_\_\_\_\_.

**四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

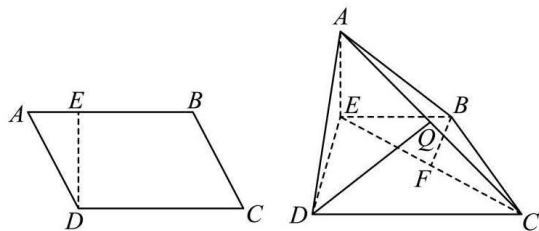
17. 西梅以“梅”为名, 实际上不是梅子, 而是李子, 中文正规名叫“欧洲李”, 素有“奇迹水果”的美誉. 因此, 每批西梅进入市场之前, 会对其进行检测, 现随机抽取了 10 箱西梅, 其中有 4 箱测定为一等品.

- (1) 现从这 10 箱中任取 3 箱, 求恰好有 1 箱是一等品的概率;
- (2) 以这 10 箱的检测结果来估计这一批西梅的情况, 若从这一批西梅中随机抽取 3 箱, 记  $\xi$  表示抽到一等品的箱数, 求  $\xi$  的分布列和期望.

18. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且  $a \cos B + (b+2c) \cos A = 0$ .

- (1) 求  $A$ ;
- (2) 若点  $D$  在边  $BC$  上,  $BD = 2DC$ ,  $AD = 2$ ,  $c = 2b$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

19. 在平行四边形  $ABCD$  中,  $AB = 3\sqrt{2}$ ,  $BC = 2\sqrt{2}$ ,  $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$ , 过  $D$  点作  $DE \perp AB$  于  $E$ , 以  $DE$  为轴, 将  $\triangle ADE$  向上翻折使平面  $ADE \perp$  平面  $BCDE$ , 连接  $CE$ ,  $F$  点为线段  $CE$  的中点,  $Q$  为线段  $AC$  上一点.



- (1) 证明:  $BF \perp AC$ ;
- (2) 若二面角  $A-DQ-E$  的余弦值为  $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{37}}$ , 求  $\frac{CQ}{CA}$  的值.

20. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 > 0$ ,  $a_{n+1} = \begin{cases} \log_2 a_n, & n = 2k-1, k \in \mathbb{N}^* \\ 2^{a_n+2}, & n = 2k, k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ .

- (1) 判断数列  $\{a_{2n-1}\}$  是否是等比数列? 若是, 给出证明; 否则, 请说明理由;

(2) 若数列  $\{a_n\}$  的前 10 项和为 361, 记  $b_n = \frac{1}{(\log_2 a_{2n+1}) \cdot a_{2n+2}}$ , 数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 求证:  $T_n < \frac{1}{2}$ .

21. 已知函数  $f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - ax\right) \ln x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}ax$ .

(1) 讨论函数  $f(x)$  的极值点;

(2) 若  $f(x)$  极大值大于 1, 求  $a$  的取值范围.

22. 已知双曲线  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$  与直线  $l: y = kx + m (k \neq \pm \frac{3}{2})$  有唯一的公共点  $M$ .

(1) 若点  $N(2, 9)$  在直线  $l$  上, 求直线  $l$  的方程;

(2) 过点  $M$  且与直线  $l$  垂直的直线分别交  $x$  轴于  $A(x_1, 0)$ ,  $y$  轴于  $B(0, y_1)$  两点. 是否存在定点  $G, H$ , 使得

$M$  在双曲线上运动时, 动点  $P(x_1, y_1)$  使得  $\|PG\| - \|PH\|$  为定值.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。

