华中师大一附中 2023 届高三第二次学业质量评价检测

数学试题

时间:120 分钟　满分:150 分　命题人：袁曼　　审题人：张丹 王文莹

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

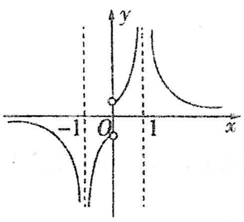
1．若复数 z 是方程 $x^2-2x+2=0$ 的根，则 $|z|$ 为

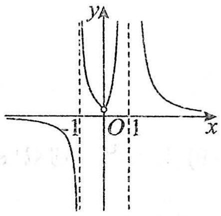
A．2　　B．$\sqrt{2}$　　C．0　　D．1

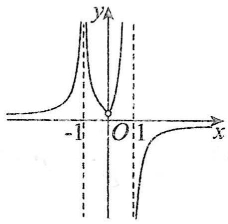
2．设集合 $M=\{x\in Z|\lg x<1\}$，$N=\{x\in Z|2^x>100\}$，则 $M\cap N=$

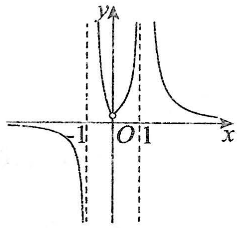
A．$\{5, 6, 7\}$　　B．$\{6, 7, 8\}$　　C．$\{7, 8, 9\}$　　D．$\{8, 9, 10\}$

3．函数 $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)\ln|x|}$ 的大致图象是

A．

B．

C．

D．

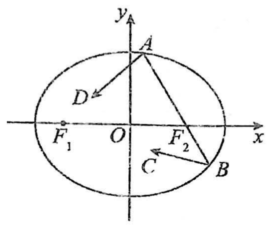
4．已知点 P 在棱长为 4 的正方体表面上运动，AB 是该正方体外接球的一条直径，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值为

A．-8　　B．-4　　C．-1　　D．0

5．设函数 $f(x)=x\sin x$，$x_1,x_2\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，若 $f(x_1)>f(x_2)$，则下列结论一定成立的是

A．$x_1>x_2$　　B．$x_1<x_2$　　C．$x_1+x_2>0$　　D．${x_1}^2>{x_2}^2$

6．古希腊数学家阿波罗尼奥斯在研究圆锥曲线时发现了椭圆的光学性质：从椭圆的一个焦点射出的光线，经椭圆反射，其反射光线必经过椭圆的另一焦点．设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，若从椭圆右焦点 F_2 发出的光线经过椭圆上的点 A 和点 B 反射后，满足 $AB\perp AD$，且 $\cos\angle ABC=\dfrac{3}{5}$，则该椭圆的离心率为



A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

7. 在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2A_1B_1$，$AA_1=2\sqrt{3}$，M 为棱 B_1C_1 的中点，当正四棱台的体积最大时，平面 MBD 截该正四棱台的截面面积是

A. $\frac{5\sqrt{3}}{4}$　　B. $\frac{15\sqrt{3}}{2}$　　C. $10\sqrt{3}$　　D. $6\sqrt{2}$

8. 在数列 $\{a_n\}$ 中给定 a_1，且函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-a_{n+1}\sin x+(a_n+2)x+1$ 的导函数有唯一零点，函数 $g(x)=12x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\pi x)-\frac{1}{2}\cos(\pi x)$ 且 $g(a_1)+g(a_2)+\cdots+g(a_9)=18$．则 $a_5=$

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{9}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 为比较甲、乙两所学校学生的数学水平，采用简单随机抽样的方法抽取 88 名学生，通过测验判断其数学成绩是否优秀，得到了如下列联表：

学校	数学成绩		合计（单位：人）
	不优秀	优秀	
甲校	33	10	43
乙校	38	7	45
合计（单位：人）	71	17	88

已知 $\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$P(\chi^2>x_\alpha)=\alpha$，根据表中数据，计算得到

$\chi^2=\frac{88\times(33\times7-10\times38)^2}{43\times45\times71\times17}\approx0.837$

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

则下列说法正确的是

A. 根据小概率 $\alpha=0.1$ 的独立性检验，两校的数学成绩优秀率没有差异

B. 根据小概率 $\alpha=0.1$ 的独立性检验，两校的数学成绩优秀率有差异，该推断犯错误的概率不超过 0.1

C. 若将表中所有数据都扩大为原来的 10 倍，根据小概率 $\alpha=0.1$ 的独立性检验，两校的数学成绩优秀率有差异，该推断犯错误的概率不超过 0.1

D. 若将表中所有数据都扩大为原来的 10 倍，根据小概率 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，两校的数学成绩优秀率没有差异

10. 科学研究已经证实：人的智力、情绪和体力分别以 33 天、28 天和 23 天为周期，均可按 $y=\sin\omega x(\omega>0)$ 进行变化．记智力曲线为 I，情绪曲线为 E，体力曲线为 P，则

A. 第 35 天时情绪曲线 E 处于最高点

B. 第 33 天到第 42 天时，智力曲线 I 与情绪曲线 E 不相交

C. 第 46 天到第 50 天时，体力曲线 P 处于上升期

D. 体力曲线 P 关于点 $(320, 0)$ 对称

11．已知异面直线 a 与 b 所成角为$60°$，平面α与平面β的夹角为$80°$，直线 a 与平面α所成的角为$20°$，点 P 为平面α、β外一定点，则下列结论正确的是

A．过点 P 且与直线a、b 所成角都是$60°$的直线有 4 条

B．过点 P 且与平面α、β所成角都是$30°$的直线有 4 条

C．过点 P 且与平面α、β所成角都是$40°$的直线有 3 条

D．过点 P 与平面α成$60°$角，且与直线 a 成$60°$的直线有 3 条

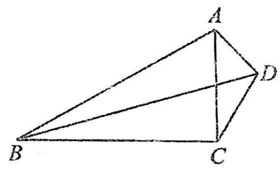
12．已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足$a_1=2$，$b_1=\frac{1}{2}$，$a_{n+1}=b_n+\frac{1}{a_n}$，$b_{n+1}=a_n+\frac{1}{b_n}$，$n\in\mathbb{N}^*$，则下列选项正确的有

A．$\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}=\frac{17}{4}$　B．$a_{100}^2+b_{100}^2=\frac{5}{2}a_{100}\cdot b_{100}$　C．$200<a_{100}\cdot b_{100}<\frac{449}{2}$　D．$a_{100}-b_{100}<-15\sqrt{2}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．已知随机变量$X\sim B(6,p)$，$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$，且$P(Y\geq 4)=\frac{1}{2}$，$E(X)=E(Y)$，则$p=$________．

14．如图，在$\triangle ABC$中，$BC=\sqrt{3}AC$，$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，点 D 与点 B 分别在直线 AC 的两侧，且$AD=DC=1$，则 BD 的最大值是________．



15．已知直线$l:y=-1$，抛物线$C:x^2=4y$的焦点为F，过点F的直线交抛物线C于A，B两点，点B关于y轴对称的点为P.若过点A,B的圆与直线l相切，且与直线PB交于点Q，则当$\overrightarrow{QB}=2\overrightarrow{PQ}$时，直线$AB$的斜率为________．

16．已知函数$f(x)=axe^x-ax+a-e^x(a>0)$，若有且仅有两个整数$x_i(i=1,2)$，满足$f(x_i)<0$，则实数 a 的取值范围为________．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10 分）

已知函数$f(x)=\sqrt{2}\sin(\omega x+\frac{\pi}{4})(\omega>0)$在区间$[0,1]$上是单调函数，且$f(x)\leq f(1)$恒成立

（1）求ω的值；

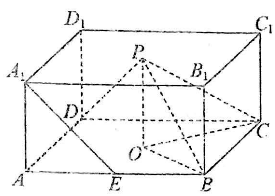
（2）求$f^2(1)+f^2(2)+f^2(3)+\cdots+f^2(2023)$的值．

18．（12 分）

如图，直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的底面为正方形，P，O分别是上、下底面的中心，E是AB的中点，$AB=kAA_1$．

（1）当$k=\sqrt{2}$时，求直线PA与平面PBC所成角的正弦值；

（2）当k取何值时，O在平面PBC内的射影恰好为$\triangle PBC$的重心．



19.（12 分）

已知各项均不为零的数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，其前 n 项和记为 S_n，且$\dfrac{S_n^2-S_{n-1}^2}{a_n}=2n^2$，$n\in\mathbf{N}^*$，$n\geq 2$，数列$\{b_n\}$满足$b_n=a_n+a_{n+1}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（1）求 a_2，a_3，S_{102}；

（2）已知等式$kC_n^k=n\cdot C_{n-1}^{k-1}$对$1\leq k\leq n$，$k$，$n\in\mathbf{N}^*$成立，请用该结论求数列$\{b_kC_n^k\}$，$k=1$，2，…，$n$ 的前 n 项和 T_n.

20.（12 分）

2023 年 3 月华中师大一附中举行了普通高中体育与健康学业水平合格性考试。考试分为体能测试和技能测试，其中技能测试要求每个学生在篮球运球上篮、羽毛球对拉高远球和游泳 3 个项目中任意选择一个参加。某男生为了在此次体育学业考试中取得优秀成绩，决定每天训练一个技能项目。第一天在 3 个项目中任意选一项开始训练，从第二天起，每天都是从前一天没有训练的 2 个项目中任意选一项训练。

（1）若该男生进行了 3 天的训练，求第三天训练的是"篮球运球上篮"的概率；

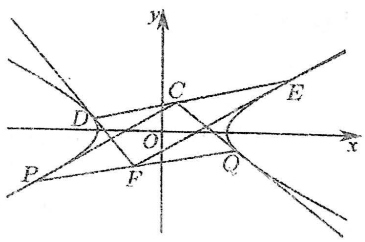
（2）设该男生在考前最后 6 天训练中选择"羽毛球对拉高远球"的天数为 X，求 X 的分布列及数学期望.

21.（12 分）

已知：若点(x_0,y_0)是双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$上一点，则双曲线在点$(x_0,y_0)$处的切线方程为$\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=1$．如图，过点$C(m,1)(-\sqrt{3}<m<\sqrt{3})$分别作双曲线$\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$两支的切线，切点分别为 P，Q，连结 P，Q 两点，并过线段 PQ 的中点 F 分别再作双曲线两支的切线，切点分别为 D，E，记$\triangle DCF$与$\triangle ECF$的面积分别为 S_1，S_2.

（1）求直线 PQ 的方程（含 m）；

（2）证明直线 DE 过点 C，并比较 S_1 与 S_2 的大小.



22.（12 分）

若函数$f(x)$，$g(x)$的图象与直线$x=m$分别交于 A，B 两点，与直线$x=n$分别交于 C，D 两点$(m<n)$，且直线 AC，BD 的斜率互为相反数，则称$f(x)$，$g(x)$为"(m,n)相关函数".

（1）若$f(x)$，$g(x)$均为定义域上的单调递增函数，证明：不存在实数 m，n，使得$f(x)$，$g(x)$为"(m,n)相关函数"；

（2）已知$f(x)=\mathrm{e}^{ax}$，$g(x)=ax^2$，若存在实数 m，n，且$mn>0$，使得$f(x)$，$g(x)$为"(m,n)相关函数"，且$|AB|=|CD|$，求实数 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。